

ریاضیات ۱ جزوه ۴۰

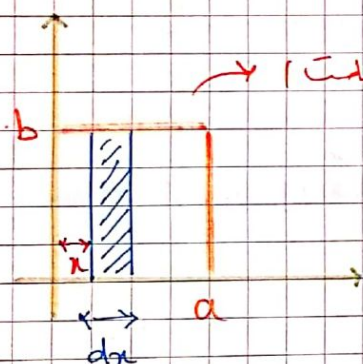
۱۴۰۳، ۹، ۱۵

$$\int f(x) dx = F(x) + C \rightarrow \text{انتگرال نامعین}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \rightarrow \text{انتگرال معین}$$

کدام انتگرال

چگونه با انتگرال مساحت زیر تابع را حساب می‌کنیم؟

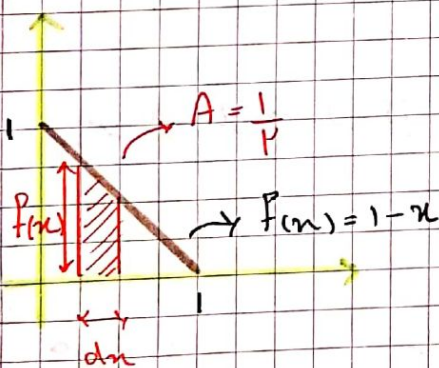


یک نوار به عرض dx و طول b در نظر می‌گیریم. (الفان کوچک) وقتی نوار را از x تا a حرکت می‌کنیم تمام سطح اویزشش می‌دهد. در واقع مساحت تابع ما را می‌دهد با a متغیر به عرض dx و طول b یا در واقع طول $f(x)$.

$$\hookrightarrow \int_0^a dA = \int_0^a b dx \rightarrow A \Big|_0^a = bx \Big|_0^a \rightarrow A \Big|_{A=0}^{A=A} = A - 0 = b(a - 0) = ab$$

$A = ab$

مثال:



$$\Rightarrow dA = f(x) dx$$

$$\hookrightarrow A = \int_0^1 (1-x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - (0 - 0) = \frac{1}{2}$$

مثال روش المکبری :

$$\int x^p \sqrt{1+x} dx =$$

$$\int x^p (1+x)^{1/2} dx \rightarrow 1+x=u \rightarrow 1 \cdot x dx = du$$

$$\hookrightarrow x=u-1 \rightarrow x^p = (u-1)^p$$

همیشه ترجیح بر این است که
از مشتق رادیکال خلاص بشیم

$$= \int (u-1)^p u^{1/2} du = \int (u^p - 2u^{p-1} + 1) u^{1/2} du = \int (u^{p+1/2} - 2u^{p-1/2} + u^{1/2}) du =$$

$$\frac{2}{p+3/2} u^{p+3/2} - \frac{2}{p+1/2} u^{p+1/2} + \frac{2}{3/2} u^{3/2} + C = \frac{2}{p+3/2} (1+x)^{p+3/2} - \frac{2}{p+1/2} (1+x)^{p+1/2} + \frac{2}{3/2} (1+x)^{3/2} + C$$

نکته: مشتق و انتگرال در صورت وجود یک هشتک (صورت ناقص ضرب) (C) :

$$\int \tan x \sec^p x dx =$$

مثال :

$$\tan x = u \rightarrow \sec^p x = du \rightarrow \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

روش ۱ :

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \rightarrow \sec x = v \rightarrow \sec x \tan x = dv$$

روش ۲ :

$$\hookrightarrow I = \int v dv = \frac{v^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

پس جوابی نشدن ؟!

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \rightarrow \frac{\sec^2 x}{2} + C = \frac{1 + \tan^2 x}{2} + C$$

چون :

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + \underbrace{(C + 1/2)}_{C'}$$

$$\int \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$1-x^2 = u \rightarrow -2x dx = du$$

$$\hookrightarrow x^2 = 1-u$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1-u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int (u^{-1/2} - u^{1/2}) du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} \right) + C = -(1-x^2)^{1/2} + \frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} + C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} + C}$$

$$(\operatorname{tg}^{-1} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+n+1} =$$

$$\int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx = x + 1/2 = u \rightarrow \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2u}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C}$$

توابع هذلولی بر اساس (a)

هندسی - arc هذلولی ها بر اساس Ln با استفاده

$$(\operatorname{Ln}(x + \sqrt{x^2+a^2}))' =$$

اثبات:

$$1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \times \frac{\sqrt{x^2+a^2} + x}{x + \sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

از صورت مالتور گرفته

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(px^2 - rx + 1)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r/p x + 1/p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 1/p)^2 + 1/q}} \rightarrow x - \frac{1}{p} = u \rightarrow dx = du$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1/q}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\ln \left(x - \frac{1}{p} + \sqrt{x^2 - \frac{r}{p}x + \frac{1}{p}} \right) \right)$$

استرال های مثلثاتی :

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos(\cos^2 x) dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx \quad \text{Sin هم به سین وصل}$$

$$\hookrightarrow \sin x = u \rightarrow \cos x = du \rightarrow I = \int (1 - u^2) du = u - \frac{u^3}{3} = \sin x - \sin^3 x + C$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

این های زوج Sin, Cos :

$$\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \left(1 - \cos 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx =$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) + C$$

معادله انتگرال به فرم: $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $n, m \neq 0$

حالت ۱: اگر توان $\cos$ فرد بود: یک عامل از آن جدا کرده و در عمل زوج باقی مانده از عبارت $(1 - \sin^2 x)$ به جای $\cos^2 x$ استفاده می کنیم و در نهایت $\sin x = u$ قرار داده شد را حل می کنیم.

$$I = \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx \rightarrow \sin x = u \quad \cos x dx = du$$

$$I = \int u^m (1 - u^2)^k du = \text{بست بنوع توان}$$

حالت ۲: اگر توان $\sin$ فرد بود یک عامل از آن جدا کرده و در عمل زوج باقی مانده از عبارت $\cos^2 x$ به جای $\sin^2 x$ استفاده می کنیم و در نهایت مشابه قبلی $\cos x = u$ قرار می دهیم.

$$I = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x \sin x dx = \rightarrow \cos x = u \quad \sin x dx = du$$

$$\rightarrow \int (1 - u^2)^k u^m du = I$$

اگر هر دو توان فرد بود، هر یک از

روش های فوق قابل اعمال است.

حالت ۳: اگر هر دو توان زوج بود: از توان شکستن استفاده می کنیم. (مثال ۵۲ قبل).

$$I = \int \tan^m x \sec^n x dx =$$

$$\rightarrow \tan x = u \quad \sec^2 x dx = du$$

$$I = \int \tan^m x \sec^n x dx = \int \tan^m x \sec^2 x \sec^{n-2} x dx = \int \tan^m x (1 + \tan^2 x) \sec^{n-2} x dx = \int u^m (1 + u^2) du =$$

$$\frac{u^{m+1}}{m+1} + \frac{u^{m+3}}{m+3} + C = \frac{1}{m+1} \tan^{m+1} x + \frac{1}{m+3} \tan^{m+3} x + C$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \rightarrow \tan^2 x = (\sec^2 x - 1)^r \quad \text{استراتژی حل}$$

$$I = \int \tan^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x (\sec x \tan x) dx = \int (\sec^2 x - 1)^r \sec^2 x (\sec x \tan x) dx =$$

$$\hookrightarrow \sec x = u \rightarrow \sec x \tan x dx = du$$

$$I = \int (u^2 - 1)^r u^2 du = \int (u^2 - 1)^r u^2 du = \int (u^{2r} - 1^r u^2) du =$$

$$\frac{u^{2r+1}}{2r+1} - \frac{1^r u^3}{3} + C = \frac{1}{2r+1} \sec^{2r+1} x - \frac{1^r}{3} \sec^3 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

ریاضیات - اجزوه

۱۴۳، ۹، ۶

انتگرال های پایه:

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$* \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \rightarrow (\ln \sec x)' = \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sec x} = \operatorname{tg} x$$

$$* \int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

$$\int \frac{\sec x \times (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

$$\int \sqrt{1 + \sin x} dx =$$

$$\int \frac{\sqrt{1 + \sin x} \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} dx = \int \sqrt{\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}} dx = \int \sqrt{\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}} dx =$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx \rightarrow 1 - \sin x = u \rightarrow -\cos x dx = du \quad I = \int \frac{-du}{\sqrt{u}} = -2\sqrt{u} + C$$

$$= -2\sqrt{1 - \sin x} + C$$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \rightarrow \sqrt{x} = u \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$$

$$= \int \frac{1}{2} e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} + C = -\frac{1}{2} e^{-\sqrt{x}} + C$$

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)+2}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) dx = x + 2 \ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} dx = \rightarrow \frac{1}{x} = v \rightarrow -\frac{1}{x^2} = dv \rightarrow \int -e^v dv = -e^v + C = -e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \rightarrow \cos \theta = u \rightarrow -\sin \theta d\theta = du$$

$$I = \int_1^{1/2} \frac{-du}{u^2} = \int_1^{1/2} u^{-2} du = \left. -\frac{1}{u} \right|_{u=1/2}^{u=1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1/2}\right) = 1$$

چرا که این شکل تغییر کرد
چون متغیر هم تغییر کرد یعنی
آن θ $\pi/2$ و 0 پس

$$\frac{1}{2} < \cos \theta < 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \rightarrow f(b) - f(a) = -(f(a) - f(b))$$

خاصیت ۳

$$\int \tan^2 x dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx =$$

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
 $\tan x = u \quad \sec^2 x dx = du$

$$\int \tan x \sec^2 x dx + \int \tan x dx = \int u du - \int \tan x dx = \frac{u^2}{2} - \ln|\sec x| + C =$$

$$\tan x = u \quad \sec^2 x dx = du$$

$$\frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot^r x dx = \int (\csc^r x - 1) dx = -\cot x - x + C \quad \text{بله: } \cot^r x = \csc^r x - 1, \cot x = -\csc x$$

$$\int \cot^r x dx = \int \cot^{r-1} x (\csc^r x - 1) dx = \int \cot^{r-1} x \csc^r x dx - \int \cot^{r-1} x dx$$

$$= \int \cot^{r-1} x \csc^r x dx - \int (\csc^{r-1} x - 1) dx = \int \frac{-u^r}{r} du - \int (\csc^{r-1} x - 1) dx =$$

$$\text{Let } \cot x = u$$

$$-\csc^r x dx = du$$

$$-\frac{1}{r} \left(\frac{u^r}{r} \right) + \frac{1}{r} \cot^r x + x + C =$$

$$-\frac{1}{r} \cot^r x + \frac{1}{r} \cot^r x + x + C$$

استدلال مشابهت بالان معكف

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = ? \quad \int \sin^m x \sin^n x dx = ? \quad \int \cos^m x \cos^n x dx = ?$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} (\sin(A-B) + \sin(A+B))$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} (\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} (\cos(A-B) + \cos(A+B))$$

$$\int \sin^r x \cos^s x dx = \frac{1}{r} \int (\sin^{r-1} x + \sin^{r+1} x) dx = \frac{1}{r} \int (\sin^r x - \sin^r x) dx \quad \text{مثال:}$$

$$= \frac{1}{r} \cos x - \frac{1}{r+1} \cos^{r+1} x + C$$

استدلال گیری از انواع جبری با تغییر متغیر مثلثاتی

$$1) \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a \sin \theta \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

$$2) \sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = a \tan \theta \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$$

$$3) \sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a \sec \theta \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \cup \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$$

۲) تعیین زوایاها باید وارون پذیر باشند

اگر این عبارت ها ظاهر شدن
باروش های قبلی نقش استدلال
گرفت باید متغیر دار.

مجموع زیر ادیفال صریح کل باشد
تا از شر ادیفال خلاص بشیم و برای
توان های $\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$ و $\frac{7}{2}$ و ...
هم همین کار رو باید کنیم

$$1) \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx \rightarrow x = 3 \sin \theta \quad dx = 3 \cos \theta d\theta$$

$$I = \int \frac{3 \cos \theta}{9 \sin^2 \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta = \int \cot^2 \theta d\theta$$

$$I = \int \frac{3 \cos \theta}{9 \sin^2 \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta = \int \cot^2 \theta d\theta = \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta = -\cot \theta - \theta + C$$

مثال:

حال باید به تدریج فضا را $x = 3 \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \rightarrow \cot \theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

$$\hookrightarrow -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{3} + C$$

$$2) \int \sqrt{x^2 + a} dx \rightarrow x = a \tan \theta = \sqrt{a} \tan \theta \rightarrow dx = \sqrt{a} \sec^2 \theta d\theta$$

$$I = \int \sqrt{a} \sec \theta \sqrt{a} \sec \theta d\theta = a \int \sec^2 \theta d\theta$$

جلوتر با جزئیات

$$u) \int \frac{dx}{x^p \sqrt{x^2 - a}} \rightarrow x = r \sec \theta \rightarrow dx = r \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$I = \int \frac{r \sec \theta \tan \theta}{r^p \tan \theta (r \sec \theta)^p} d\theta = \frac{1}{r^p} \int \cos^p \theta d\theta = \frac{1}{a^p} \int (1 + \cos^2 \theta) d\theta =$$

$$\frac{1}{a^p} \left(\theta + \frac{1}{p} \sin^2 \theta \right) + C$$

$\sin \theta \cos \theta$

$$x = r \sec \theta, \therefore \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = r \frac{1}{\cos \theta} = \frac{x}{r}$$

$$\hookrightarrow \cos \theta = \frac{r}{x} \rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a^p} \left(\sec^{-1} \frac{x}{r} + \frac{r \sqrt{x^2 - r^2}}{x^p} \right) + C$$

11. 9, 11, 12

11. 9, 11, 12

$$v) \int \frac{dx}{(4 - x^2)^{3/2}} \rightarrow x = \sqrt{4} \sin \theta \quad dx = \sqrt{4} \cos \theta d\theta$$

$$I = \int \frac{\sqrt{4} \cos \theta}{(\sqrt{4} \cos \theta)^3} d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{4} \int \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \tan \theta + C$$

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{4}} \rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + C$$

$$w) \int x \sqrt{1 - x^2} dx \rightarrow x^2 = \sin \theta \quad x dx = \cos \theta d\theta$$

$$I = \int \frac{1}{2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int (1 + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{4} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) + C$$

$$\theta = \sin^{-1} x^2$$

$$\hookrightarrow I = \frac{1}{4} \left(\sin^{-1} x^2 + x^2 \sqrt{1 - x^2} \right) + C$$

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

انتگرال گیری جزء به جزء (integration by parts)

$$d(uv) = (du)v + (dv)u \rightarrow \text{مشتق حاصل ضرب}$$

$$\hookrightarrow (dv)u = d(uv) - (du)v$$

$$\int (dv)u = \int d(uv) - \int (du)v \quad \text{حالا اگر از طرفین انتگرال بگیریم:}$$

$$\Rightarrow \int (dv)u = uv - \int (du)v$$

اینجا اول مشتق گرفته بودیم و حالا
انتگرال پس این را هم باید رو مشتق می‌لنیم
و نتیجه تابع اولیه.

$$\int \underbrace{f(x)}_u \underbrace{g(x) dx}_{dv} = uv - \int v du$$

(۱) یک تابع رو dv (مشتق v) و یک تابع
رو u یا u در نظر می‌گیریم

(۲) از dv انتگرال می‌گیریم تا v بدست بیاید.

(۳) از u مشتق می‌گیریم تا du بدست بیاید.

(۴) حالا u و v رو کنار هم می‌ذاریم uv (اینجا)

(۵) u و v رو هم کنار هم می‌نویسیم $\int v du$ (اینجا)

مثال:

$$\int x e^{7x} dx \rightarrow \begin{cases} x = v \\ e^{7x} = u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{7} e^{7x} = v \\ dx = dv \end{cases}$$

$$I = \frac{x}{7} e^{7x} - \frac{1}{7} \int e^{7x} dx$$

بین v و u چند جمله‌ای
نباید و du در نظر می‌گیریم

$$1) I = \int \ln x dx \quad \begin{cases} dx = du \\ \ln x = u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = u \\ \frac{1}{x} dx = du \end{cases}$$

$$I = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

$$2) I = \int \sin^{-1} x dx \quad \begin{cases} dx = du \\ \sin^{-1} x = u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = u \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = du \end{cases}$$

$$I = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

تمام عملیات های اینورس با جابجایی جز اول حل می شود

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow 1-x^2 = u \rightarrow -2x dx = du \rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\rightarrow I = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$3) I = \int x \ln x dx = \begin{cases} x dx = du \\ \ln x = u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^{\frac{p}{p}} = u \\ \frac{1}{x} dx = du \end{cases}$$

$$I = \frac{x^{\frac{p}{p}}}{\frac{p}{p}} \ln x - \int \frac{x^{\frac{p}{p}}}{\frac{p}{p}} dx = \frac{x^{\frac{p}{p}}}{\frac{p}{p}} \ln x - \frac{x^{\frac{p}{p}}}{\frac{p}{p}} + C$$

$$4) I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \rightarrow \ln x = t \rightarrow I = \int \ln t dt = t \ln t - t + C =$$

$$\ln x \ln(\ln x) - \ln x + C$$

صحت جواب را با مشتق کردن می توانیم چک کنیم

$$* \int \sec^{-1} \sqrt{x} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \sec^{-1} \sqrt{x} = u \\ dx = dv \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} dx = du \\ x = v \end{array} \right. \quad (\sec^{-1} u)' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$I = x \sec^{-1} \sqrt{x} - \frac{1}{p} \int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = x \sec^{-1} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} + C$$

$$* \int \tan^{-1} \sqrt{x} dx = \text{تجربہ ضابطہ} \quad (\tan^{-1} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$I) \int x \cos x dx \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos x dx = dm \\ x = n \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = m \\ dx = dm \end{array} \right.$$

$$= I = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$II) \int x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x dx = du \\ x = v \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\cos x = u \\ dx = dv \end{array} \right.$$

$$I = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$I = \int e^x \sin x dx$$

بین قسماں و ضلالتی
م قسماں و مشتق
در نظر می گیریم

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x dx = du \\ e^x = v \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\cos x = u \\ e^x dx = dv \end{array} \right.$$

$$I = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \cos x dx = dm \\ e^x = n \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin x = m \\ e^x dx = dn \end{array} \right.$$

$$Lr II = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \rightarrow I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$Lr I = -e^x \cos x + e^x \sin x + C$$

$$= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

انتگرال لیبری به اوش بازگشتی

گاهی اوقات در اوش چند بار به خود انتگرال با علامت منفی می رسیم که به اوش بازگشتی عمل می کنیم

$$\int e^x (f(x) + f'(x)) dx = e^x f(x) + C$$

$$I = \int e^x f(x) dx + \int e^x f'(x) dx =$$

شقی دارن جزیه جزیه منی

$$\begin{cases} f'(x) dx = du \\ e^x = v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) = u \\ e^x dx = dv \end{cases}$$

ثبت کنید:

$$I = \int e^x f(x) + e^x f'(x) - \int e^x f'(x) dx + C = e^x f(x) + C$$

$$v) \int e^x (\underbrace{tg^2 x + tg x + 1}_{= tg x}) dx = e^x tg x + C$$

طبق اثبات بالا

$$I = \int (\text{چند جمله ای}) \times \begin{Bmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{Bmatrix} dx$$

اوش جدول (برای استبدال مرتبه جزیه)

$$1) \int x^p \sin kx dx =$$

$$= -\frac{x^p}{k} \cos kx + \frac{p}{k} \int x^{p-1} \sin kx dx + \frac{1}{k} \cos kx + C$$

1)		
x^p	+	$\sin kx$
p	-	$\frac{1}{k} \cos kx$
$p-1$	+	$\frac{1}{k} \sin kx$
0	-	$\frac{1}{k^2} \cos kx$

از چند جمله ای اینقدر مشتق می گیری تا صفر بشه

بعد به معون همجانی به مشتق لرفتی

از $\sin x$ استبدال میگیری

به یکی درصورت با علامت + -

ضرب می کنی و نهایتاً با هم

جمع می کنی

$$\int_0^{\pi} x \sin^{\mu} x dx$$

u	v
x	$\sin^{\mu} x$
1	$-\frac{1}{\mu} \cos^{\mu} x$
0	$-\frac{1}{\mu} \sin^{\mu} x$

$$= \left(-\frac{x}{\mu} \cos^{\mu} x - \frac{1}{\mu} \sin^{\mu} x \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$\left(\frac{-\pi}{\mu} \cos^{\mu} \pi - \frac{1}{\mu} \sin^{\mu} \pi \right) - \left(\frac{0}{\mu} \cos 0 - \frac{1}{\mu} \sin 0 \right) = \frac{\pi}{\mu}$$

ابواب ۱ جزوه ۱۳

۱۳، ۹، ۱۳

$$۱۰) \int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx$$

از $\sec^3 x$ به هیچ شکلی

نمی‌توانستیم جدا کنیم ولی از

$$\begin{cases} \sec^2 x dx = du \\ \sec x = v \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tan x = u \\ \sec x + \tan x = v \end{cases} \rightarrow \sec x + \tan x dx = dv$$

$$I = \sec x + \tan x - \int \sec x + \tan x dx = \sec x + \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx =$$

$$\sec x + \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx = \sec x + \tan x - I + \ln |\sec x + \tan x|$$

با کلمات اضافی $\sec^3 \rightarrow (\sec^2 x - 1)$ و پس از بازگشتی

$$I = \sec x + \tan x - I + \ln |\sec x + \tan x| \Rightarrow 2I = \sec x + \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \sec x + \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$۱۱) \int x^p (1 + \ln x) dx = \int x^p x^{\ln x} (1 + \ln x) dx$$

$$(x^x)' = (1 + \ln x) x^x$$

$$\Rightarrow x^x = u \rightarrow (1 + \ln) x^x = du \rightarrow I = \int u^p du = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$$

$$\boxed{\int x^a (1 + \ln x) dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C}$$

$$۱۲) \int (\ln x)^p dx = \begin{cases} \ln^p x = u \\ dx = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p(\ln x)^{p-1} \cdot \frac{1}{x} = du \\ x = v \end{cases}$$

$$I = x(\ln x)^p - p \int \ln x dx = x(\ln x)^p - p(x \ln x - x) + C$$

$$13) \int \frac{\ln x}{x + x \ln x} dx \rightarrow 1 + \ln x = u \quad \frac{1}{x} dx = du$$

$$I = \int \frac{u-1}{u} du = \int (1 - \frac{1}{u}) du = u - \ln u + C$$

$$= \ln x - \ln(1 + \ln x) + \frac{K}{C+1} = \ln \left| \frac{x}{1 + \ln x} \right| + K$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \rightarrow \text{اوش 1}$$

تکثیر مثلثاتی با هذلولی

$$\text{اوش 2: } x = a \cosh t \rightarrow dx = a \sinh t dt$$

هذلولی

$$I = \int \frac{a \sinh t}{a \sinh t} dt = \int 1 dt = t + C = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

حال این با اوش قبلی ماوی چون اینورس هایپر بولیدها

ام با $\ln$ نوشته می شن

$$\text{اوش 3: } x = a \sec \theta \rightarrow dx = a \sec \theta \tan \theta$$

مثلثاتی هذلولی

$$I = \int \frac{a \sec \theta \tan \theta}{a \tan \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$\frac{x}{a} = \sec \theta \rightarrow \frac{a}{x} = \cos \theta \rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

$$\rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \rightarrow I = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C$$

$$(13) \int \frac{x}{\sqrt{p-x-x^p}}$$

$$p-x-x^p = p - \underbrace{(x+1)^p}_u$$

$$\begin{cases} x+1 = p \sin \theta \\ dx = p \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$I = \int \frac{p \sin \theta - 1}{p \cos \theta} p \cos \theta d\theta = \int (p \sin \theta - 1) d\theta$$

$$\hookrightarrow \frac{x+1}{p} = \sin \theta$$

$$I = -p \cos \theta - \theta + C$$

$$\hookrightarrow \theta = \sin^{-1} \frac{x+1}{p}$$

$$\sqrt{1 - \frac{(x+1)^p}{p}} = \cos \theta \rightarrow p \cos \theta = \sqrt{p-x-x^p}$$

$$I = -\sqrt{p-x-x^p} - \sin^{-1} \frac{x+1}{p} + C$$

$$(14) \int_0^{\frac{\sqrt{p}}{p}} \frac{x^p}{(x^p+q)^{3/2}} dx$$

$$x = \frac{p}{p} \tan \theta \quad dx = \frac{p}{p} \sec^2 \theta d\theta$$

$$\hookrightarrow (\sqrt{p x^p + q})^3 = (\sqrt{q + \tan^2 \theta + q})^3 = (p \sec \theta)^3$$

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{p}}{p}} \frac{\frac{p}{p} \tan^p \theta}{(p \sec \theta)^3} \times \frac{p}{p} \sec^2 \theta d\theta$$

$$\bullet \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \leftarrow \text{بأنه انوقت} \bullet \quad \frac{p}{p} \tan \theta \times \sqrt{p}$$

$$\frac{\frac{p \sqrt{p}}{p}}{\frac{p}{p}} = \sqrt{p} \quad \text{و} \quad x = \frac{p}{p} \tan \theta \quad \leftarrow \text{بأنه انوقت} \bullet \quad \frac{p}{p} \tan \theta \times \sqrt{p}$$

$$I = \frac{p}{14} \int_0^{\frac{\sqrt{p}}{p}} \frac{\sin^p \theta}{\cos^3 \theta} d\theta =$$

$$\hookrightarrow \sin^p \theta = \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \rightarrow \cos \theta = u \rightarrow -\sin \theta d\theta = du$$

$$\Rightarrow I = \frac{-p}{14} \int_1^{\frac{1}{u}} \frac{1-u^2}{u^3} du =$$

$$\frac{1}{p} \cos \theta < 1 : \text{انوقت} \bullet \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{p}{14} \int_1^{\frac{1}{u}} (1 - \frac{1}{u^2}) du = \frac{p}{14} (u + \frac{1}{u}) \Big|_1^{\frac{1}{u}}$$

تکامل لیری به روش تجزیه چند جمله ای

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

هر چند جمله ای به عوامل خطی $(ax+b)^n$ و
درجه 2 (ax^2+bx+c) از مرتبه n تقسیم می شه
لپ پس مخرج رو تجزیه می کنیم.

$$\int \frac{x^{x^{1-1}}}{x^2+1} dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \operatorname{tg}^{-1} x + C$$

روش سه های جزئی (چند جمله ای تجزیه ی سه واقعی به سه های جزئی)

خطور از سه واقعی کسی است که در آن در $P(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر باشد. اگر سه غیر واقعی داشتیم صورت را به مخرج تقسیم می کنیم تا یک سه واقعی بدست آید. مثال بالا

به طور کلی یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی را می توان به صورت عوامل خطی و درجه دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کرد. در تبدیل یک سه واقعی به سه های جزئی ابتدا $Q(x)$ را به عوامل خطی و درجه دوم تجزیه کرده و حالت زیر را در نظر می گیریم:

حالت ۱:

عوامل $Q(x)$ همه خطی بوده و هیچ کدام تکراری نیستند.

$$Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2) \cdots (a_nx+b_n) \rightarrow \text{کرنه یونی}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

A_1 و A_2 و ... ضرایب ثابتی هستند که باید مناسب شوند.

مثال ۱: $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx \rightarrow (x^2 - a^2) = (x-a)(x+a)$

$$\hookrightarrow \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \Rightarrow 1 = A(x+a) + B(x-a)$$

$$\begin{aligned} x=a &\rightarrow A = \frac{1}{2a} \\ x=-a &\rightarrow B = -\frac{1}{2a} \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C \\ &= \frac{1}{2a} \left(\ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right) + C \end{aligned}$$

۲) $\int \frac{vx-1}{x^2-x-4} dx \quad \frac{vx-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = y$

$$A(x-3) + B(x+2) = vx-1 \rightarrow (A+B)x + 2B - 3A = vx-1$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (A+B) &= v \\ (2B-3A) &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \frac{vx-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3}$$

$$\hookrightarrow \int \frac{vx-1}{x^2-x-4} dx = \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 3 \ln|x+2| + 4 \ln|x-3|$$

حالت ۲:

هنگامی که عوامل خطی اند و برخی از آنها تکراری اند.

فرض کنید $(ax+b)^r$ یکی از عوامل $Q(x)$ باشد در این صورت آن را به شکل $\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}$ از مرتبه P می نامیم این عمل با مجموع r جمله از یک صفاظر است.

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}$$

$$\int \frac{x^6 + x^5 + 14x - 12}{x^3(x-2)^2} dx$$

حل:

$$\frac{x^6 + x^5 + 14x - 12}{x^3(x-2)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2}$$

$$x^6 + x^5 + 14x - 12 = Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3$$

بالجواب: $= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$

تکاملات اول جلد ۱۱۱۴

۲، ۹، ۳، ۱۱

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

حالت ۳: (درجه ۲ داشته باشیم بدون تکرار)

عوامل $Q(x)$ خطی و درجه دوم هستند و عوامل درجه دوم تکراری نیستند.

متناسب با عوامل درجه دوم ax^2+bx+c در مخرج به صورتی

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

نویسین باقی این است که این جا ax^2+bx+c فاکتور به ۲ معاد

شده یعنی دلتای منفی دارند و به عوامل دیکه تقسیم نمی شه.

مثال:

$$\int \frac{x^2-x-5}{x^3+x^2-2} dx =$$

$$\frac{x^2-x-5}{x^3+x^2-2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+2} + \frac{C}{x-1}$$

$$(Ax+B)(x-1) + C(x^2+x+2) = x^2-x-5$$

$$x=1 \rightarrow -5 = 5C \rightarrow C = -1 \Rightarrow A=2, B=3$$

$$I_y = \int \frac{2x+3}{x^2+x+2} dx + \int \frac{-5}{x-1} dx$$

$$I_y = 5 \ln |x-1| + C$$

برای انتگرال درجه ۱
درجه ۲

راه هست. یا باید مشتق مخرج رو تو صورت بازسازی کرد به $\ln$ ختم شه یا مخرج اومد به کسر میکنی تا بقونی به $\ln$ برسی. از ادم ص بجه.

۱) یکی از ایندهای مخرج ۱ بوده. (احتمال دوم)

پس یکی از عوامل مخرج $(x-1)$ بوده. حالا عامل دیکه

اوپرست میاریم: $\frac{x-1}{x^2+x+2}$

$$\frac{x^3+x^2-2}{x^2+x+2} = \frac{x^3-x^2}{x^2+x+2}$$

$$\frac{2x^2-2}{x^2+x+2} = \frac{-(2x^2-2x)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{2x-2}{x^2+x+2} = \frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\frac{-(2x-2)}{x^2+x+2}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{Cu+d}{u^2+a^2} du$$

یعنی چی؟

مثلاً آنه داشته باشیم $\frac{2x+3}{x^2+2x+3}$ می‌تونیم بنویسیم

مخرج در واقع بوده

$$\sqrt{2}=a \text{ و } u=(x+1) \quad (x+1)^2+2$$

به همین ترتیب صورت بوده $2(x+1)+1 = 2u+1$

$$= C \int \frac{u + \frac{d}{C}}{u^2+a^2} du$$

$$= \frac{C}{2} \int \frac{2u}{u^2+a^2} du + D \int \frac{1}{u^2+a^2} du =$$

چرا قسمت متغیر ثابت و از هم جدا کردیم؟
چون یکی رو می‌تونیم به $\ln$ برسونیم و یکی دیگه
او به $\frac{1}{a} \operatorname{tg}$.

$$= \frac{C}{2} \ln|u^2+a^2| + \frac{D}{a} \operatorname{tg} \frac{u}{a} + C$$

چرا قسمت اول رو در ۲ ضرب و تقسیم کردیم؟
C رو آوردیم بیرون انتگرال؟

تا متقی مخرج تو صورت ظاهر بشه و بتونیم
 $\ln$ بنویسیم.

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \ln|x^2+2x+3| + \operatorname{tg} \frac{(x+1)}{\sqrt{2}} + C$$

حالت ۴:

عوامل $Q(x)$ خطی و درجه دوم بوده و برخی عوامل درجه دو تکراری اند.

اگر ax^2+bx+c یک عامل تکراری مرتبه p ، $Q(x)$ باشد آنگاه متناظر با عامل $(ax^2+bx+c)^p$ مجموع p کسری زیر را خواهیم داشت.

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_px+B_p}{(ax^2+bx+c)^p}$$

مثال:

اگر در مخرج کسر، عامل $(x^2+5x+2)^3$ داشته باشیم متناظر با این عامل خواهیم داشت.

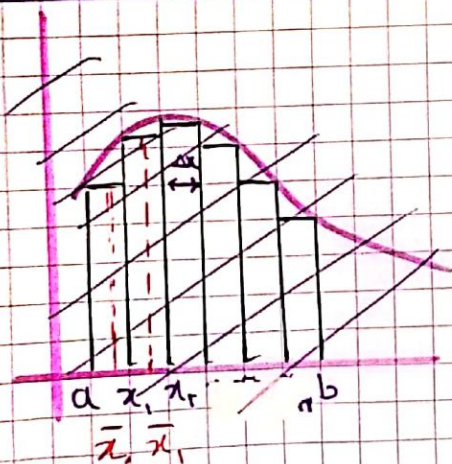
$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+5x+2)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+5x+2)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(x^2+5x+2)^3}$$

انتگرال متعین و انتگرال ناپیدا (عبری).

همه متقارن ها و غیره مناسبه کرد و نه همه انتگرال ها و مثل: $\int \sqrt{1+x^2} dx = \int e^{-x^2} dx$ توانیم حالت از انتگرال ناپیدا عبری استفاده می کنیم. (برخی انتگرال ها و غیره به صورت تقریبی مناسبه کرد).

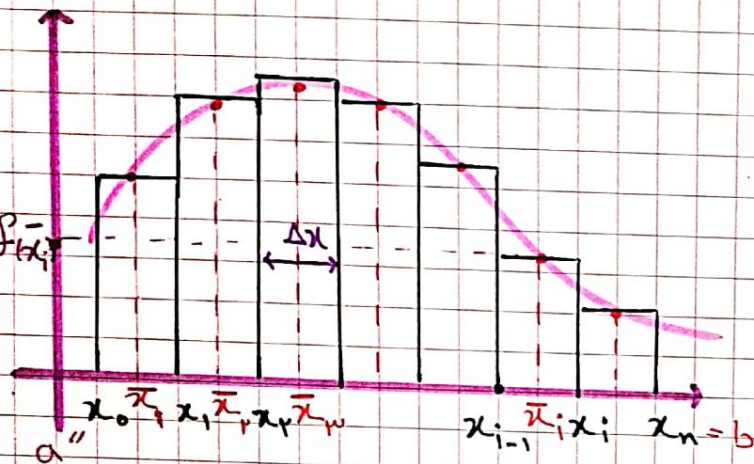
انتگرال متعین در واقع بیان کننده مساحت به وجود آمده بین منحنی یک تابع و محورهای مختصات و یا یک منحنی دیگر می باشد.

(روش نقطه میانی)
Midpoint Method



روش نقطه میانی

(midpoint method)



برای محاسبه مساحت زیر منحنی تابع در فاصله $[a, b]$ ، این فاصله را به n قسمت مساوی تقسیم می کنیم و طول هر قسمت را Δx می نامیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

مساحت نوار i ام: $S_i = f(\bar{x}_i) \frac{b-a}{n}$, $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$

مساحت زیر نمودار (جمع تمام نوارها): $S_n = \sum_{i=1}^n S_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)$

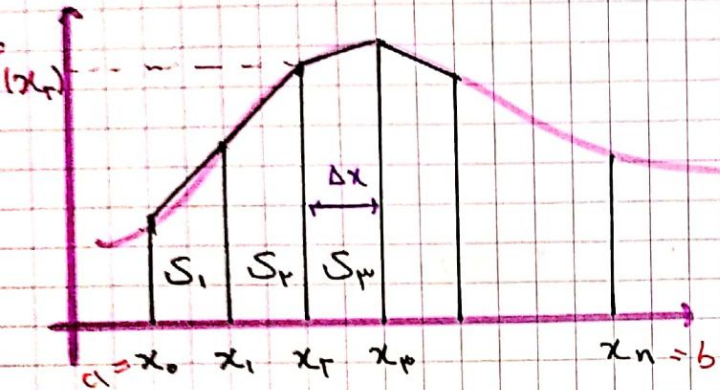
وقتی n (تعداد نوارها) به سمت بینهایت برود، Δx (عرض نوارها) به سمت صفر میرود و در نتیجه لبه های بالایی نوارها به روی نمودار تابع منطبق میشوند و در نتیجه $\bar{x}_i$ میانگین x_{i-1} و x_i نیست بلکه باهاشون برابر

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) = \int_a^b f(x) dx$$

تبدیل به انتگرال عددی

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x (f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + \dots + f(\bar{x}_n))$$

روش ذوزنق‌ای



به جانوارهای مستطیلی و ذوزنق‌ای
شیرده می‌ده و با جمع کردن ششون مساحت کل
پیدا می‌شود.

$$S_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x \quad \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n S_i$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

حالا با $\sum$ و باز نوی می‌کنیم :

$$\frac{\Delta x}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \frac{\Delta x}{2} [f(x_2) + f(x_3)] + \dots + \frac{\Delta x}{2} [f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

پس داریم :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [1 \times f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 1 \times f(x_n)]$$

مثال: با استفاده از روش ذوزنق‌ای و تقسیم‌بندی برای $n=5$ تقریب بزنید.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$a=1, b=2 \Rightarrow \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = 0.2$$

روش ذوزنق‌ای :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0.2 \left[\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2} \right] = 0.495435$$

اوش تقه میانی :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0.2 \left[\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9} \right] = 0.491908$$

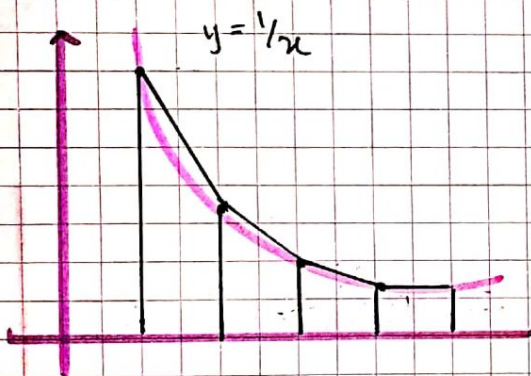
حل دقیق :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0.493147$$

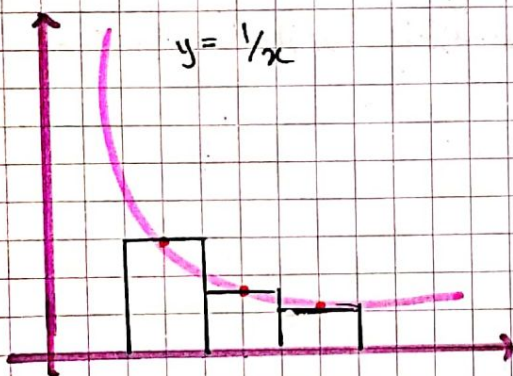
لرور اوش دقیق تره؟

$$\text{خطا دوزننه} = 100 \times \frac{0.493147 - 0.495435}{0.493147} = -0.46\%$$

$$\text{خطا تقه میانی} = 100 \times \frac{0.493147 - 0.491908}{0.493147} = 0.25\%$$



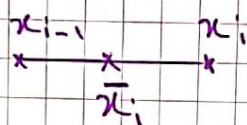
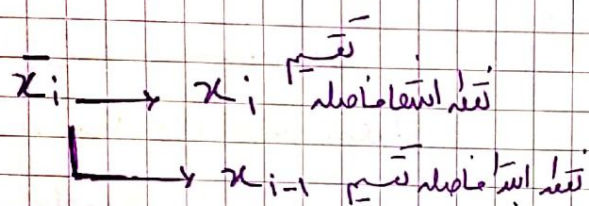
اوش دوزننه ای بیشتر از مقدار واقعی انتگرال محاسبه می کنه.
(overestimate) می کنه چون در بازه $[1, 2]$ نکتہ تابع $1/x$ او به بالاست و لبه های دوزننه بالاست از لبه های نمودار قدر می گیرن.



امادر مورد اوش تقه میانی نکتہ تسخیم دار چون قسمتی از متعلیل ها بالایی نمودار و قسمتی پایین نمودار قدر می گیرن

اوش نته میانی در حالت خاص $a=0$ و $b=1$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \rightarrow \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$



چون همگی برابریم و Δx به صغر میل می کند x_{i-1} ، x_i ، $\bar{x}_i$ برابر می شود.

الف) وقتی به جای $\bar{x}_i$ از ابتدا فواصل تقسیم استفاده کنیم.

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

برای n نقطه داریم:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

ب) وقتی به جای $\bar{x}_i$ از نقطه انتهای فواصل تقسیم (x_i) استفاده کنیم.

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$$

حد های فوق می توانند در مقابل برخی سری ها انداخته شوند.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \left(\frac{3}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^3 \right]$$

این جا باید تست کنیم سری
به شکل حالت خاص است که
در آورده

$$= \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

حالا میگوییم چه تابعی بوده به x^3 ،
نداشتی n^{-3} شده $(\frac{1}{n})^3$ ؟ x^3 بوده پس:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{(n^n)^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{1/n}$$

این جا به فرم ضرب و توانی است که به فرم جمع بود.

$$\ln A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n!}{n^n} \right)$$

چی میتونه ضرب رو به جمع تبدیل کنه؟ $\ln$:

$$\ln A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \dots \times \frac{n}{n} \right]$$

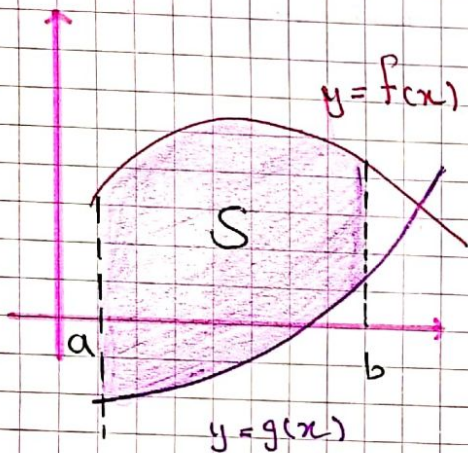
$$\ln A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \ln \frac{3}{n} + \dots + \ln \frac{n}{n} \right]$$

حالا ماوی با
استدلال می‌کنیم.

$$\ln A = \int_0^1 \ln x dx = \underbrace{(x \ln x - x)}_{0 \times \infty} \Big|_0^1 = -1 - 0 = -1 \rightarrow A = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

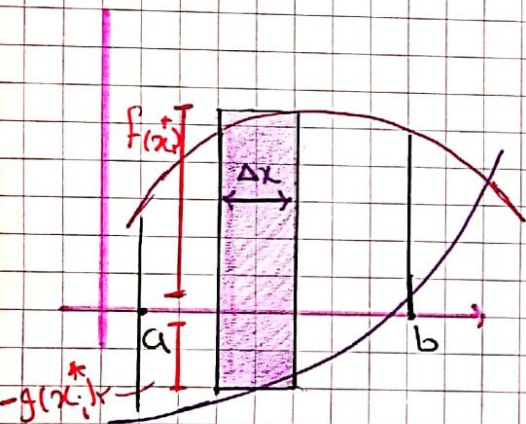
$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

حاسبه سطح بین منحنی‌ها با استفاده از انتگرال متعین



$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

اگر x را بین a و b و y را بین $f(x)$ و $g(x)$ باشد.



مثل قبل ماست و به نوارهایی به ارتفاع $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ و

عرض Δx تقسیم می‌کنیم.

چرا $g(x_i^*)$ ؟ چون مقدار $g(x)$ منحنی شده برای اینکه

ارتفاع درست دریا را باید در یک منحنی ضرب و جمع با

$f(x_i^*)$ جمع کنیم.

x_i^* شعاع نقطه میانی است.

$$\text{area of } S = \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

ماست یک نوارهای است با $\Delta x [f(x_i^*) - g(x_i^*)]$.

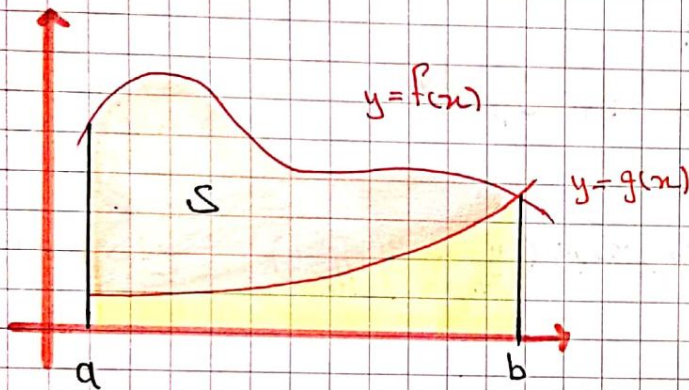
بین ماست بین ۲ نوار است جمع تمام نوارها.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

n به نسبت بینهایت بزرگ Δx (عرض نوارها) به نسبت صفر صفره و تغییرات Δx است.

حالا می بینیم که اگر $a < x < b$ باشند ارتفاع مابین
 منحنی (A) مابین y و $g(x)$ و $y = f(x)$ و $g(x)$ با :

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



دیدگاه دوم :

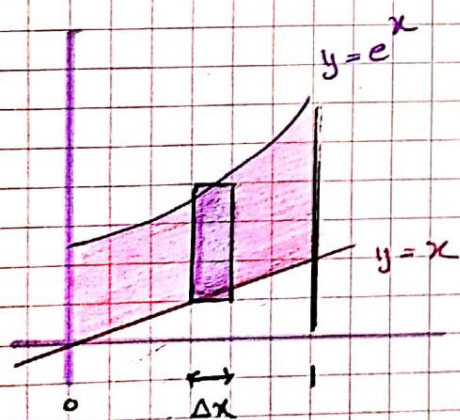
در واقع داریم می بینیم که سطح زیر $f(x)$ و اول
 سطح زیر $g(x)$ و بعد سطح زیر $g(x)$ و
 از این کم کنی به مابین شون میرسی

$$A = [\text{area under } y = f(x)] - [\text{area under } y = g(x)]$$

$$= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

چون بدان هاماری
 هستن در هم ارقام شدن

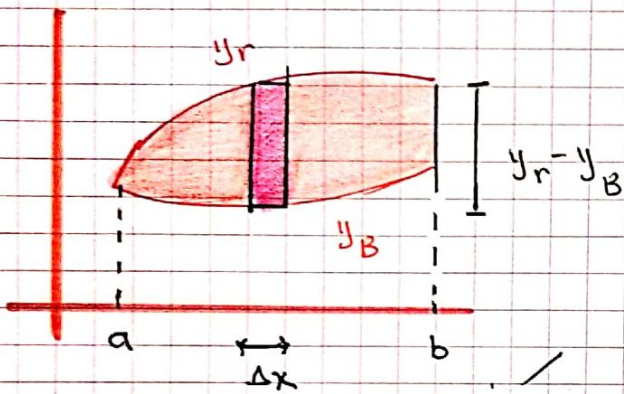
مثال : مابین منحنی های $y = x$ و $y = e^x$ در بازه [0, 1] بیابید.



اول به عنوان کوچک منحنی در نظر می گیریم
 ارتفاع برابر می شه با منحنی بالا سطحای منحنی پایین : $e^x - x$
 و Δx هم مابین dx می شه.

$$A = \int_0^1 (e^x - x) dx = (e^x - \frac{1}{2} x^2) \Big|_0^1 = e - \frac{1}{2}$$

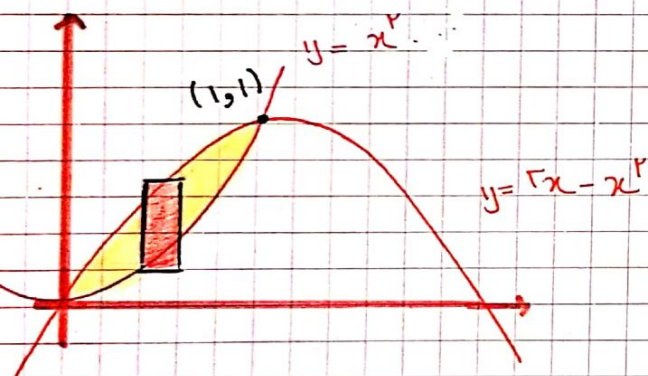
استغاب نوار قائم
برای معادله سطح.



$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (y_r - y_B) \Delta x$$

$$= \int_a^b (y_r - y_B) dx$$

وقتی می بینیم $(y_{top} - y_{bottom})$ باید متغیرها را و به حسب x بیان کنیم.



مثال ۲:

نقطه (منفی - منفی) / علاقه مثبت و منفی
top Bottom

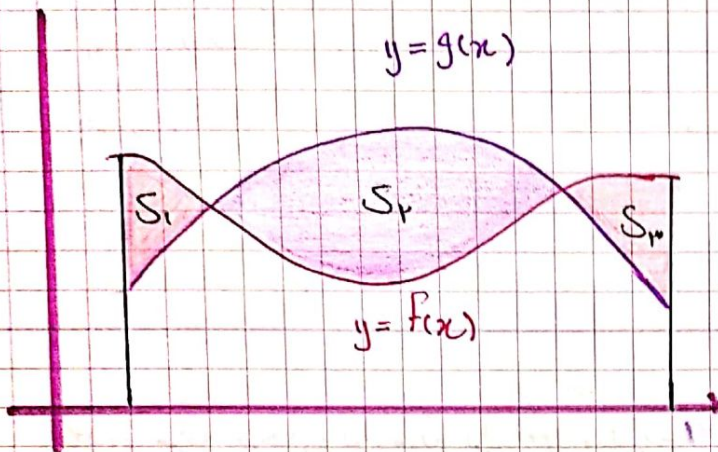
انه حایه جابجایی نشون منفی در حیات.

توی بازه ای داده شده $(2x - x^2)$ top و x^2 Bottom قرار داره.

$$(y_r - y_B) \Delta x = (2x - x^2 - x^2) \Delta x$$

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{2}{3}$$

معمولاً علامت وقتی منفی بالا و پایین عرض می شوند



اندازه قبل حساب کنیم انتگرال ها + و - در میان
و هر یک رو حتی می تونیم

در ناحیه 1 که منفی ده کرده $f(x)$ ؟

در ناحیه 2 که منفی ده کرده $g(x)$ ؟

در ناحیه 3 که منفی ده کرده $f(x)$ ؟

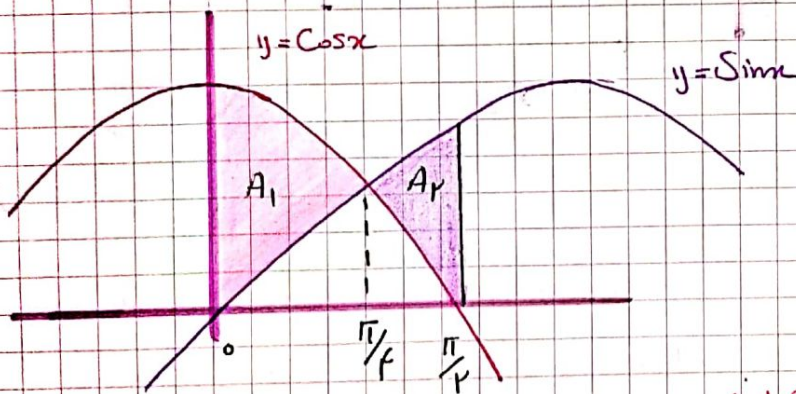
$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{when } f(x) \gg g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{when } g(x) \gg f(x) \end{cases}$$

پس باید بدین :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

پس : (در فاصله او هنگام انتگرال گیری باید)

تکین علامت کنی متداولی اونو نویسی



مثال 3 :

$$\cos x \text{ } x = (0 - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin x \text{ } x = (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})$$

$$\text{اونو نویسی } \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x$$

تکین علامت کنی و ناحیه قدیمه اند پس :

$$A = \int_0^{\pi/4} |\cos x - \sin x| dx = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

اولس دوم :

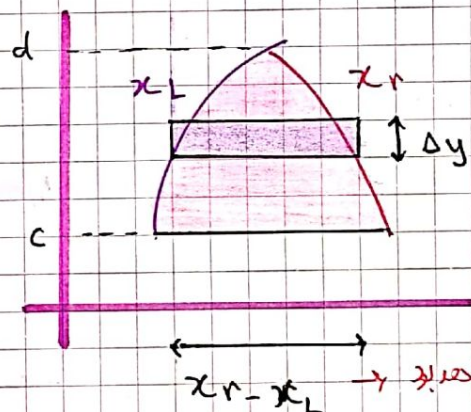
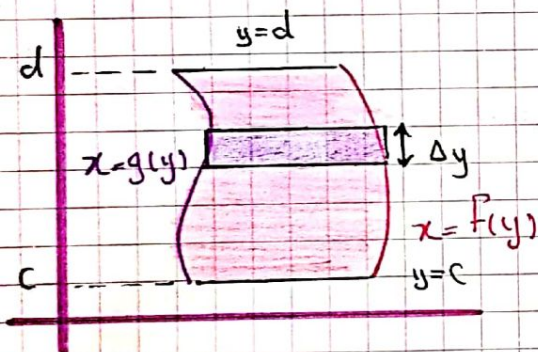
چون ناحیه هرینه و هم ماصت هستند لبت :

$$A = \Gamma A_1 = \gamma \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx$$

بعضی مواقع بجای نوار قائم نوار افقی میگیریم

در این حالت طول نوار مادی با x راست صغای x چپ مینه .

عرض نوار هم مادی با dy مینه .



حساب علامتش + خواهد بود $\rightarrow$ و مینه حبابه جا نشی

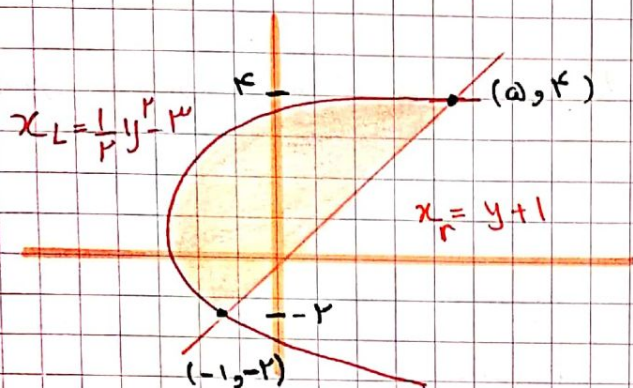
$$A = \int_c^d (f(y) - g(y)) dy$$

$$A = \int_c^d (x_R - x_L) dy$$

نوار افقی رو از بالا تا پایین حرکت میدی .

اگر شرف left و right عوض نشد یک اشتغال نیاز داری .

اگر عوض شد بیش از یک اشتغال نیاز داری .



مثال صبیح

(نموده انتگرال نوار افقی یا قائم)

(۱) نقاط برخورد رو با هم می‌زنیم و از آن نصفی پیدا می‌کنیم

$$\frac{1}{4}y^2 - 3 = y + 1 \rightarrow y = -2 \text{ و } 4$$

(۲) حالا از نوار قائم رو در نقطه بدیم در قسمت راست $x = \frac{1}{4}y^2 - 3$ و $y = \sqrt{4x+4}$

چون $4x+4$ در نقطه بد نقطه $(-1, -1)$ از نقطه -1 به بعد این شرط عوض می‌شه پس به 2 اشتغال نیاز داریم یکی از -3 و یکی از -1 و یکی از -1 .

(۳) پس بهترین از نوار افقی استفاده کنیم تا باید اشتغال حل بشه.

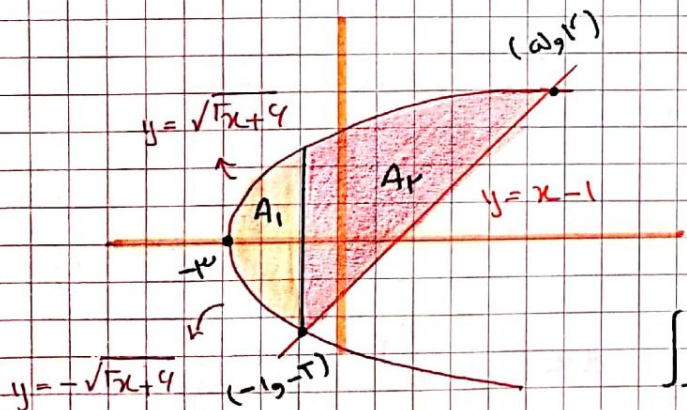
(تو نوار افقی شرط $left$ و $right$ عوض می‌شه)

$$A = \int_{-2}^4 (x_R - x_L) dy$$

$$= \int_{-2}^4 [(y+1) - (\frac{1}{4}y^2 - 3)] dy = \int_{-2}^4 (-\frac{1}{4}y^2 + y + 4) dy = (-\frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 4y) \Big|_{-2}^4$$

$$= -10.6 + 8 + 16 - (11.3 + 2 - 8) = 18.1$$

اما از نوار قائم استفاده کنیم:



$$A = \int_{-1}^0 \sqrt{4x+4} - (-\sqrt{4x+4}) dx + \int_{-1}^5 [\sqrt{4x+4} - (x-1)] dx =$$

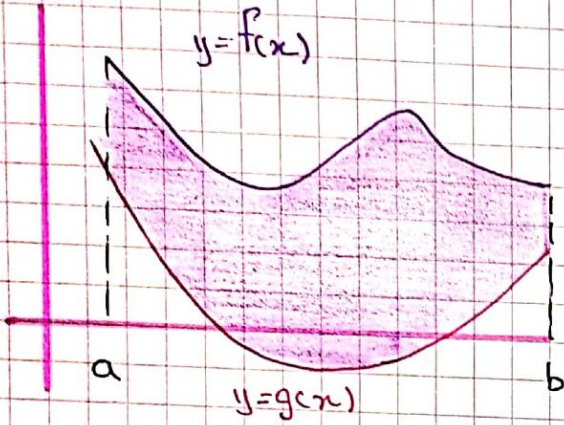
$$\int_{-1}^0 2\sqrt{4x+4} dx + \int_{-1}^5 \sqrt{4x+4} dx + \int_{-1}^5 (-x+1) dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \Big|_{-1}^5 + (-\frac{1}{2}x^2 + x) \Big|_{-1}^5 = 18$$

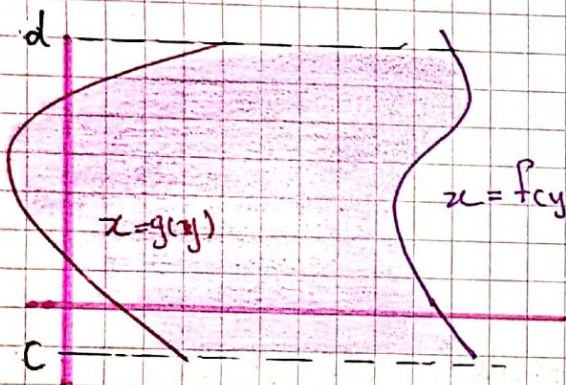
و رادیکال تحت سراز تون

حل می‌یسی افقی گزینه بهترین بود.

صورت بر اوش حساب سمت (نوار قائم و نوار افقی)



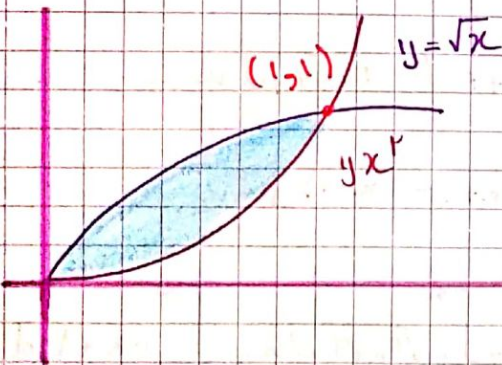
$$A = \int_a^b (\text{upper function}) - (\text{lower function}) dx \quad a \leq x \leq b$$



$$A = \int_c^d (\text{right function}) - (\text{left function}) dy \quad c \leq y \leq d$$

ناحیه
استدلال تیری
ضلعیت
نوار
طول نوار

مثال: مساحت ناحیه بین $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ را بیابید.

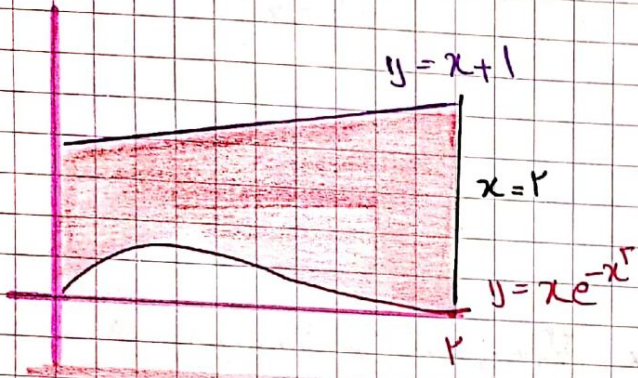


$$A = \int_a^b (\text{upper function}) - (\text{lower function}) dx$$

$$y=x^2, y=\sqrt{x} \rightarrow x^2=\sqrt{x} \rightarrow x^4=x^2 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=1 \quad \int_{x=0}^{x=1}$$

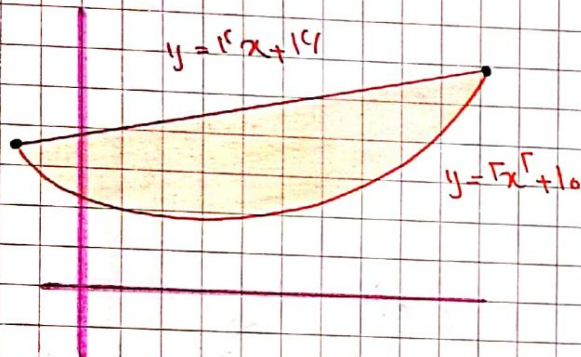
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

• محاسبه مساحت بین $y = x+1$ و $y = xe^{-x^2}$ در بازه $[0, 2]$



$$A = \int_a^b (\text{upper function}) - (\text{lower function}) dx$$

$$= \int_0^2 (x+1) - xe^{-x^2} dx = \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}e^{-x^2} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} = 3.5092$$



• محاسبه مساحت بین $y = 2x^2 + 10$ و $y = 4x + 14$ در بازه $[-1, 3]$

$$A = \int_a^b (\text{upper function}) - (\text{lower function}) dx$$

$$= \int_{-1}^3 (4x+14) - (2x^2+10) dx = \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 4) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{48}{3}$$

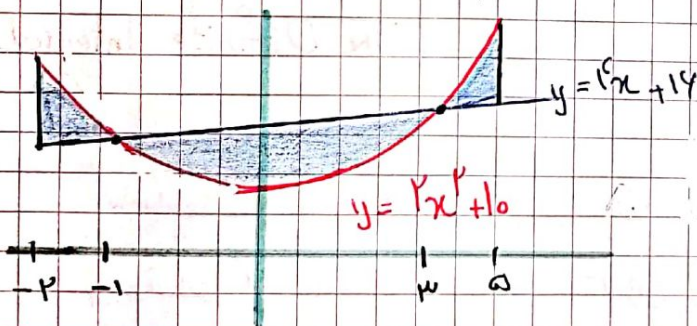
$$2x^2 + 10 = 4x + 14 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

نقطه‌های اشتراک

چون گفته بود مساحت معطوف و بازه ندارد پس این کار رو کردیم

آه افعی می‌رسیم هم بی‌اربعی می‌رسیم هم ۲ اشتراک ایجاد می‌دهیم مناسب نبود

• محاسبه مساحت بین $y = 2x^2 + 10$ و $y = 4x + 14$ در بازه $x = -1$ و $x = 3$



اول تعیین علامت می‌کنیم در هر ناحیه

منفی top به پایین

$$2x^2 + 10 = 4x + 14 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^3 (4x+14) - (2x^2+10) dx + \int_3^{\infty} (2x^2+10) - (4x+14) dx =$$

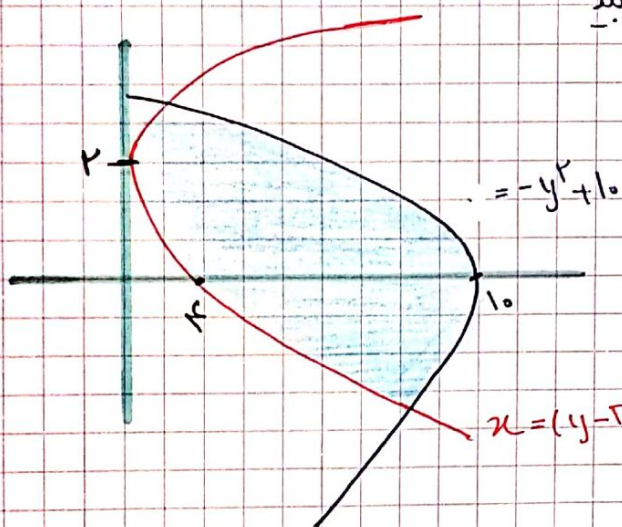
$$\int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 4) dx + \int_3^{\infty} (2x^2 - 4x - 4) dx =$$

s.a.m

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{-1}{3} + 2x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^3 + \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right) \Big|_3^5 =$$

$$\frac{14}{3} + \frac{48}{3} + \frac{48}{3} = \frac{110}{3}$$

مساحت ناحیه معاد بین ۲ منحنی $x = -y^2 + 10$ و $x = (y-2)^2$ را بیابید.



این دو قطعاً افقی می‌ایم. چرا؟

آه نه نور افقی در نظر بگیردی و از بالا تا پایین

حرکت بستی، شرط right و left تغییر نمی‌کنه.

پس افقی اوشی مناسبه. آه قائم بگیریش به سمت اشتغال.

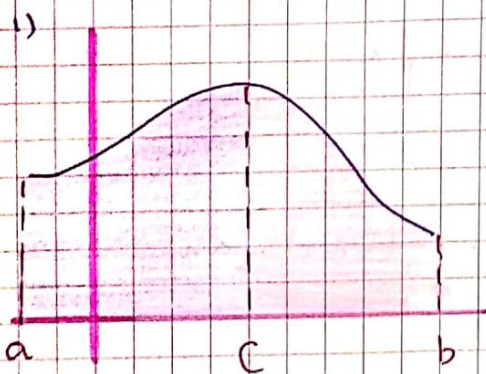
$$A = \int_c^d (\text{right function}) - (\text{left function}) dy$$

$$A = \int_{-2}^4 -y^2 + 10 - (y-2)^2 dy = \int_{-2}^4 -y^2 + 10 - (y^2 - 4y + 4) dy = \int_{-2}^4 -2y^2 + 4y + 6 dy = \left(-\frac{2}{3}y^3 + 2y^2 + 6y \right) \Big|_{-2}^4 = \frac{48}{3}$$

یادآوری تعریف اشتغال معین:

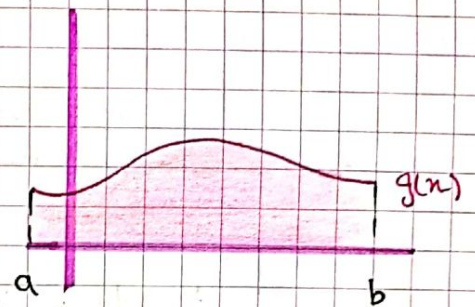
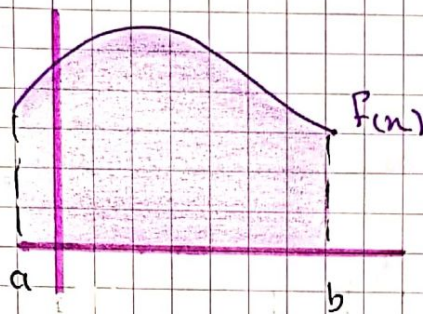
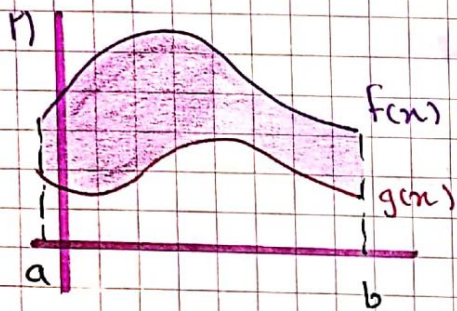
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

(The Definite Integral)



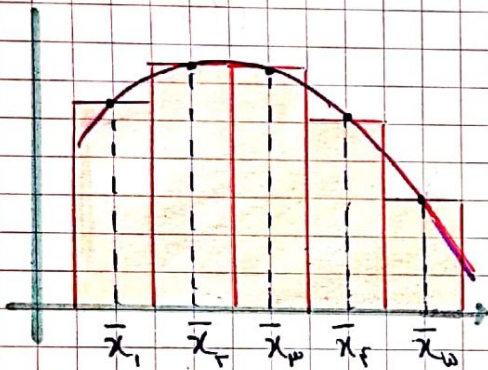
آه حباب مثل وجود داشته صیقلی بین a و b و نقطه c
او در نظر بگیردی و بعد جمع ۲ اشتغال رو حساب کن.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

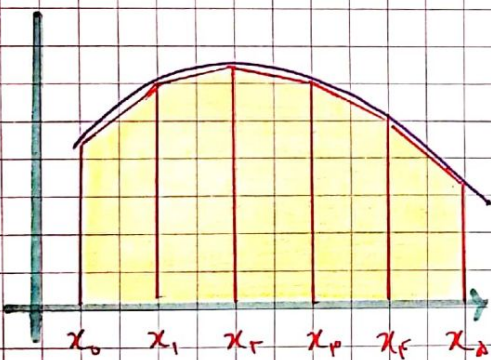
قاعده ذوزنبدهای:



$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x [f(x_1) + f(x_r) + \dots + f(x_n)]$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{r} \quad \bar{x}_i = \frac{1}{r}(x_{i-1} + x_i)$$

قاعده ذوزنبدهای:



$$\Delta x \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{r} \right) = \frac{\Delta x}{r} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x + \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right]$$

$$= \frac{\Delta x}{r} \left[\sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \right]$$

$$= \frac{\Delta x}{r} [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_r)) + \dots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))]]$$

انگزال نامر یا نامناسب

(improper integral)

$$\text{الف)} \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

اگر یکی یا هر دو حدود انگزال بینهایت باشند

$$\text{ب)} \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

در صورتی که انگزال نامر

یا نقطه گسستگی بین حدود انگزال واقع شده

$$\text{ج)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

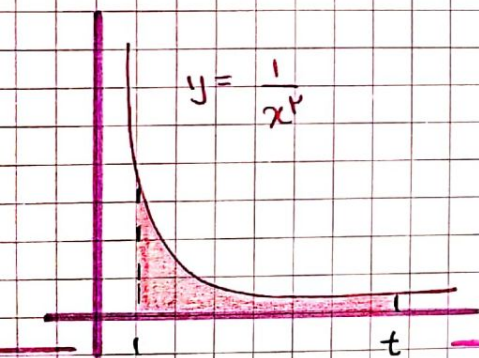
در صورتی که a نقطه گسستگی بین

انگزال باشد مثلاً به این شکل نوشت

انگزال نامر ۲ حالت دارد

۱- همگرا (Convergent) وقتی منتهی به عدد باشد

۲- واگرا (Divergent) وقتی منتهی به بینهایت باشد یعنی وجود نداشته باشد

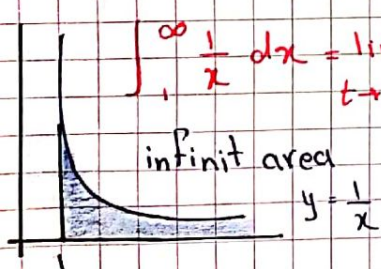


$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left. -\frac{1}{x} \right|_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

مثال:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1 \quad \text{همگرا (Convergent)}$$

ماحت معصور بین تابع $y = \frac{1}{x}$ و محور x را محاسبه کنید: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = ?$



$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) = \infty$$

واگرا (Divergent)

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx \rightarrow \text{به سمت } -\infty \text{ رفته است، به سمت } 0 \text{ رفته است}$$

مثال:

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x e^x dx$$

استبدال جزء جزئی

$$u = x, \quad dv = e^x$$

$$du = dx \quad v = e^x$$

$$\Rightarrow \int_t^0 x e^x dx = x e^x \Big|_t^0 - \int_t^0 e^x dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

$$\hookrightarrow t \rightarrow -\infty \rightarrow e^{-\infty} = 0 \quad \text{حقیقت میزینم}$$

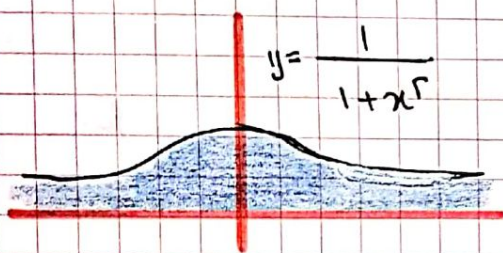
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-e^t) = 0$$

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-te^t - 1 + e^t) = -0 - 1 + 0 = -1 \rightarrow \text{جواب}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left. \tan^{-1} x \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

✓ هکله (صغیر به عدد شده).



$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = ?$$

و به ازای چه قدری از p هکله هست؟

صغیر قبل حساب کردیم به ازای $p=1$ و اگر $p > 1$ پس به ازای $p+1$ حساب می کنیم

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right]$$

اگر $p > 1$ آنگاه $p-1 > 0$ و همچنین $t \rightarrow \infty$ پس $t^{p-1} \rightarrow \infty$ پس $\frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \quad p > 1 \quad \text{هکله (Converges)} \quad \text{حالت 1:}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = t^{1-p} \rightarrow \infty \quad p < 1 \rightarrow p-1 < 0 \quad \text{واگر (diverges): حالت 2:}$$

پس $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ در صورتی هکله خواهد بود که $p > 1$

اگر $f(x)$ در نقطه‌ای مانند c گسستگی داشته باشد

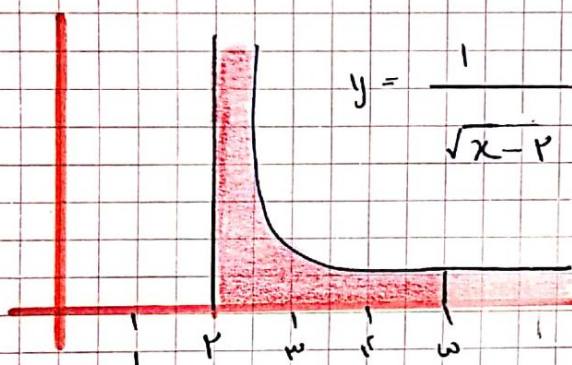
باید انتگرال رو بشکنی :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

مثال :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = ?$$

نقطه $x=2$ ، نقطه گسستگی تابع است .



پس اگر چه کران ها بینهایت نیستن ولی چون یکی از حدود تطبیق کرده

با گسستگی تابع پس انتگرال نامرعه است .

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \sqrt{x-2} \Big|_2^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2(\sqrt{t-2} - \sqrt{2-2}) = 2\sqrt{t} \end{aligned}$$

همچنین

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$$

ایجاد

$x=1$ نقطه گسستگی تابع است پس

باید انتگرال رو بشکنیم

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) = -\infty$$

و اینرا

$$\int_0^1 \ln x \, dx =$$

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x \, dx =$$

انتگرال ناپیدا

$$= x \ln x \Big|_t^1 - \int_t^1 1 \, dx = 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t) = -t \ln t - 1 + t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0 \times \infty = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{1/t} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t) = 0$$

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t \ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$$

خاصیت انتگرال:

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-x) \, dx$$

اثبات:

$$\int_0^a f(a-x) \, dx = - \int_a^0 f(u) \, du = \int_0^a f(u) \, du$$

$$u = (a-x) \quad \text{اگر}$$

$$du = -dx \quad \text{انوقت}$$

$$u = a \quad \text{وقتی } x = 0$$

$$u = 0 \quad \text{وقتی } x = a$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}$$

مثال:

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n(\pi/4 - x)}{\sin^n(\pi/4 - x) + \cos^n(\pi/4 - x)} dx =$$

$$\sin(\pi/4 - x) = \cos x$$

$$\cos(\pi/4 - x) = \sin x$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx =$$

I اولیہ رو با I نہ خودمون بدست آوردیم

جمع می کنیم چون مخرج هایلن هست:

$$2I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx = \int_0^{\pi/4} 1 dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

حاصل شد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$$

بدون n از مخرج بالتقریب می گیریم

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$$

بقی بقدر میلانی

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

طبق تعریف میانه:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$$

چون ابتدای یوده داخلش 1 ازاد می

اول بدست آوردیم 1

کاربردهای استخوان تعیین

معادله ابعاد طول استخوان

حجم تمام استخوان ثابت است

مساحت قاعده در ارتفاع می باشد

مساحت استخوان

مساحت استخوان $A(a)$ و مساحت استخوان $A(b)$ است به صفت بالوده عبور کنیم در نقطه x فعلی
مساحت صفت بالوده $A(x)$

حالا اگر صفت $A(x)$ را در Δx در نظر بگیریم و ضرب در مساحت بگیریم
داخل جسم رو به از این میله ها می کشیم و با هم جمع می کنیم

مساحت صفت

$$V(S_i) = A(x_i^*) \Delta x$$

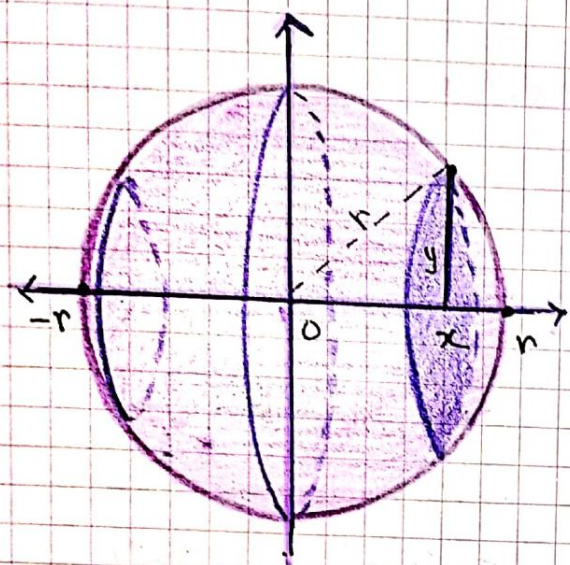
$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x$$

پس داریم :

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

اگر $A(x)$ ثابت باشد (شکل استخوان باشد مثلاً که مساحت قاعده تغییر نکند) آنوقت :

$$V = \int_a^b A dx = A(b-a)$$



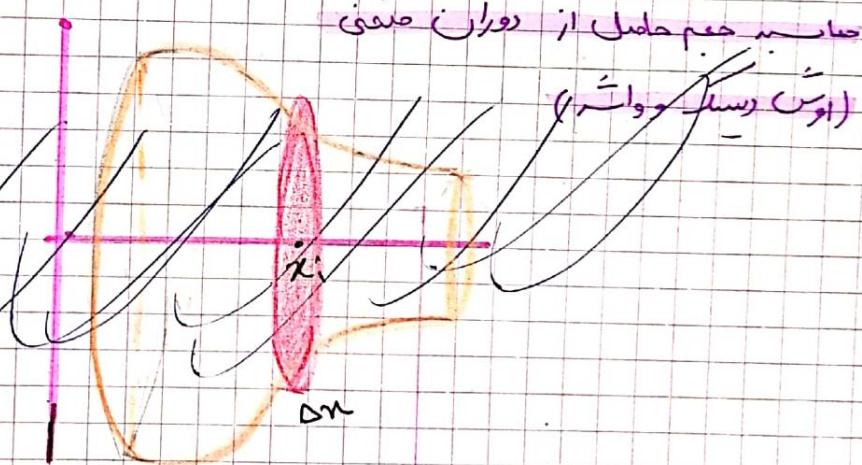
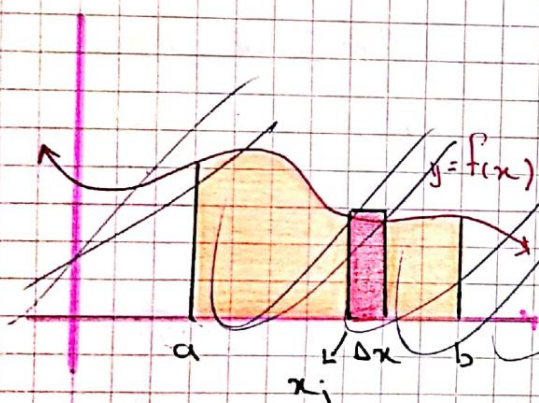
حجم رده

$$A(x) = \pi y^2 = \pi (r^2 - x^2)$$

$$V = \int_{-r}^r A(x) dx = \int_{-r}^r \pi (r^2 - x^2) dx$$

$$\rightarrow \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r =$$

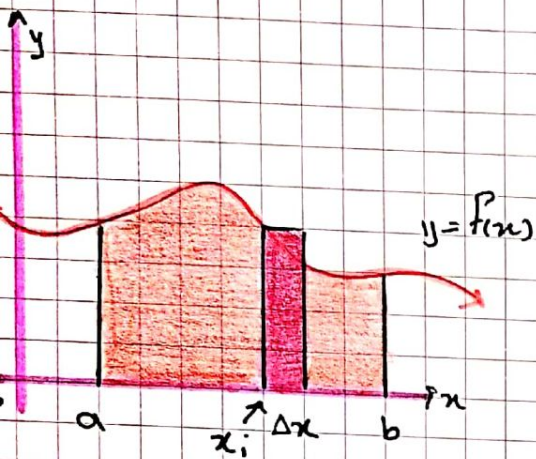
$$\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$



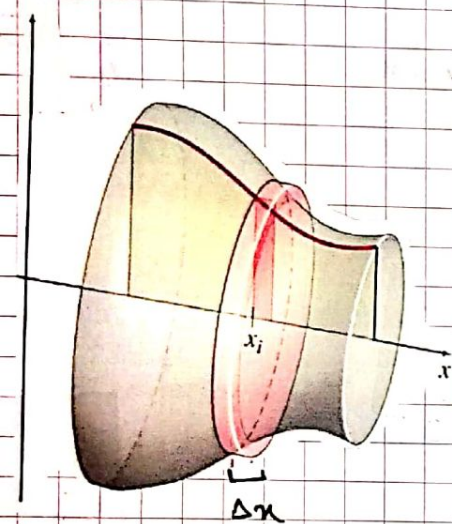
حاصل حجم حاصل از دوران صفحه
(روش دیسک و واشر)

معادله حجم حاصل از دوران :

(روش دیسک و روش واشِر)



مفروض کنید سطح خارجی از یک حلقه و حول محور
x ها دوران بدیم انوقت حجم زیر بدست میاد.



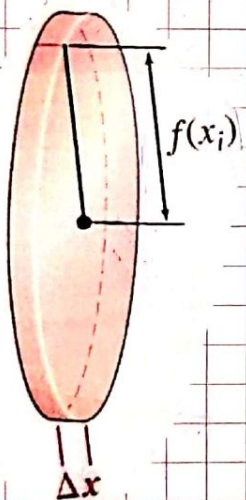
حالا اگر بفواصیم حجم رو حساب کنیم یکد الان
کوتاه حجم او در نقطه می گیریم . حالا سه طبقه الان کوتاه
حجم بر محور x ها عمود کنیم به یکد دایره یا (رنگه) میگیریم .
حجم یکد به اینده با $V = \pi r^2 h$. در این جا حجم میای میشه با :
 $V = \pi (f(x_i))^2 \Delta x$

پس داریم :

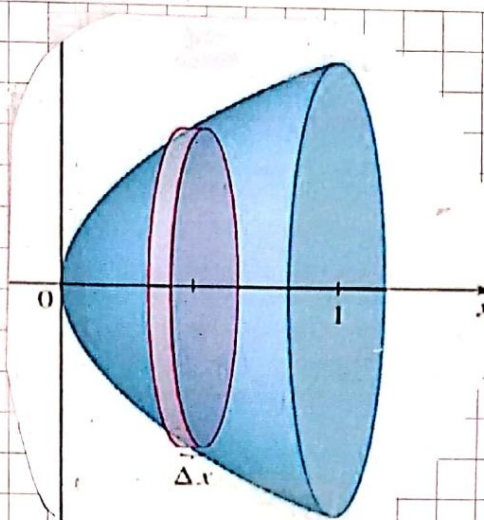
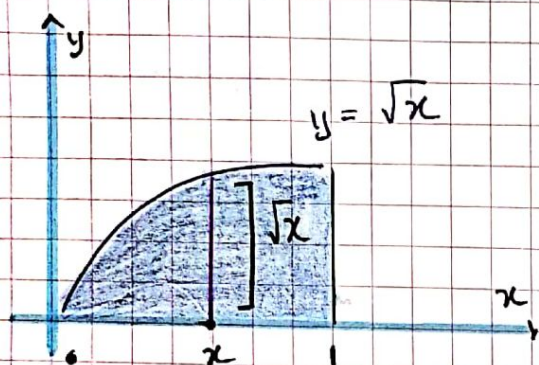
برای معادله حجم

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \Delta x =$$

$$\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$



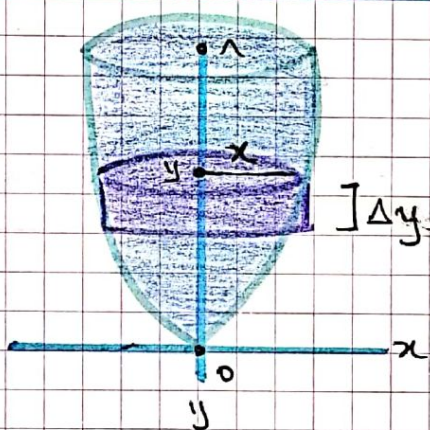
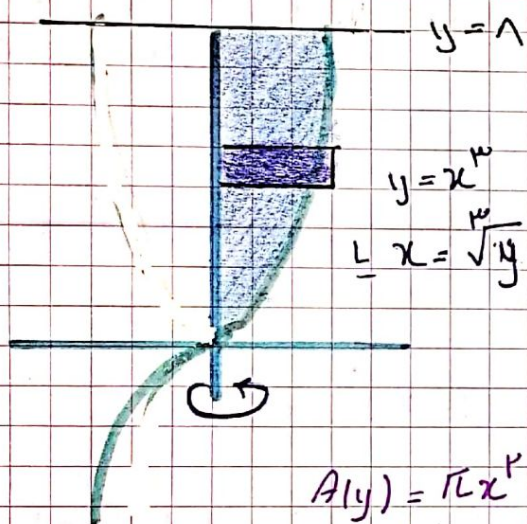
مثال (۱)



دھنی لور

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \pi x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

مثال (۲)



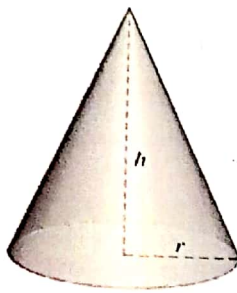
$$A(y) = \pi x^2 = \pi (\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}$$

اینجا افقی میگیریم

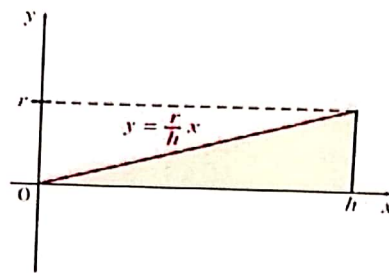
$$A(y) \Delta y = \pi y^{2/3} \Delta y$$

$$V = \int_0^8 A(y) dy = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0^8 = \frac{96}{5} \pi$$

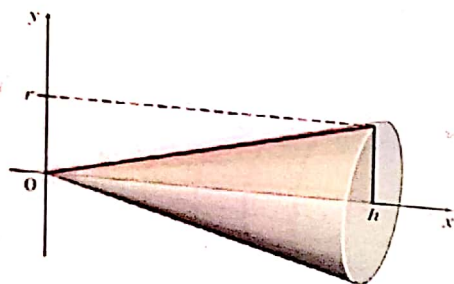
(3) أمثلة حجم مخروط :



(a)



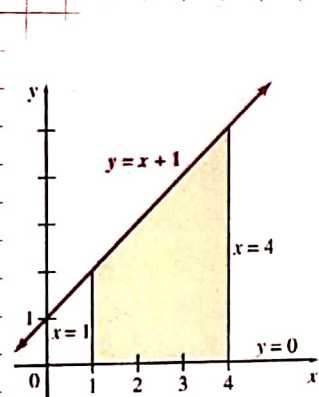
(b)



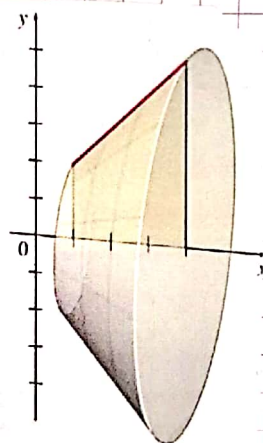
(c)

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2 x^2}{h^2} dx = \pi \frac{r^2 x^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

(4)

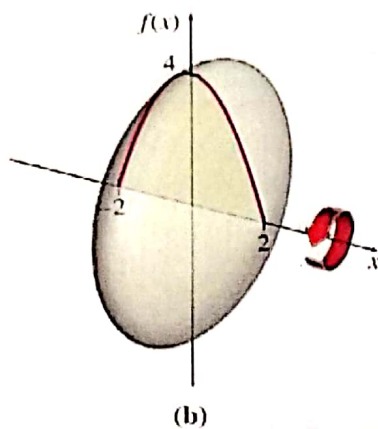
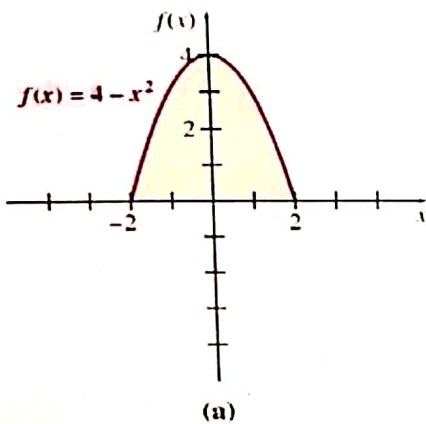


(a)



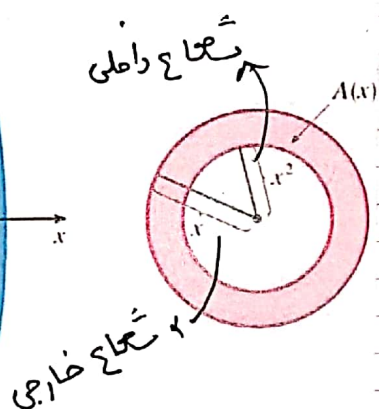
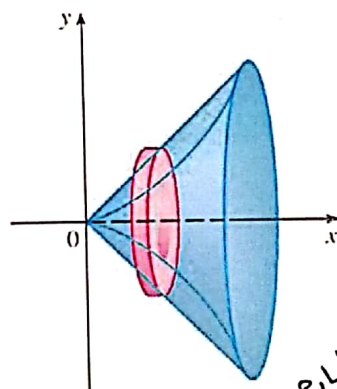
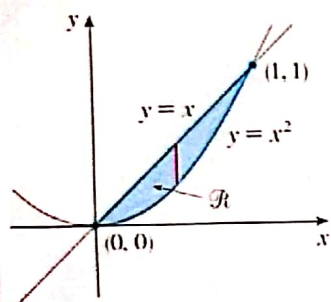
(b)

$$V = \int_1^5 \pi (1+x)^2 dx = \pi \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_1^5 = \frac{\pi}{3} (5^3 - 1^3) = \frac{116\pi}{3}$$



حوله محور عمودی دوران کردیم
(۵) شعرون شعرون عمودی کنی.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-2}^2 \pi (4 - x^2)^2 dx \\
 &= \int_{-2}^2 \pi (16 - 8x^2 + x^4) dx \\
 &= \pi \left(16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^2 = \\
 &= \frac{512}{15} \pi
 \end{aligned}$$



(۶) $\pi r^2 - \pi r^4$

اوشن و اشتر:

شعرون دیکه دی داخل
خالی.

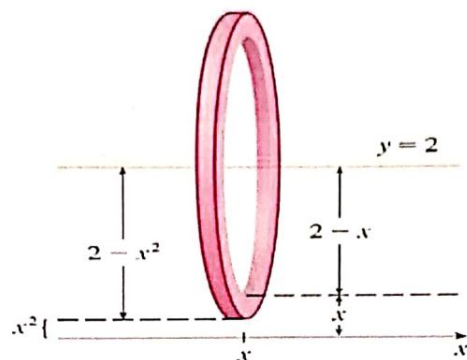
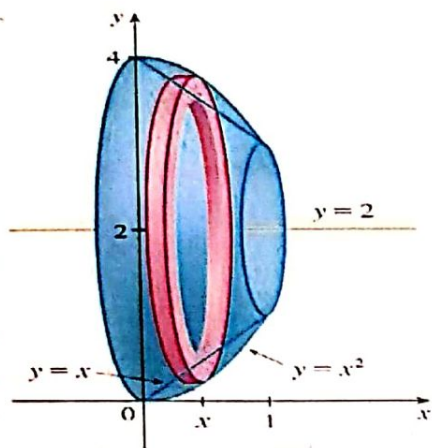
$$A(x) = \pi r^2 - \pi (r^2)^2 = \pi (x^2 - x^4)$$

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \pi (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

این جا شعاع داخل از شعاع بیرون شده و شعاع خارجی از خط.

$$A = \pi (\text{outer radius})^2 - \pi (\text{inner radius})^2$$

s.a.m



فیلای حول محور x ها
دوران میداد این جا
مول $r = 2$

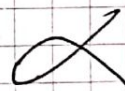
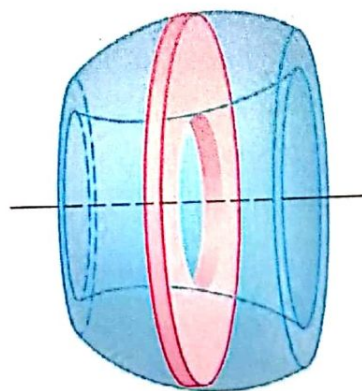
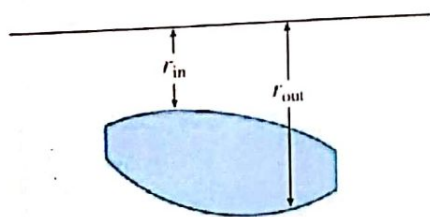
شعاع خارجی و اثر
از بعضی ابعاد
و شعاع داخلی از خط

$$A(x) = \underbrace{\pi(2-x^2)^2}_{\text{خط } L} - \underbrace{\pi(x)^2}_{\text{لبه داخلی}}$$

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 \pi[(2-x^2)^2 - (x)^2] dx =$$

$$\pi \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_0^1 = \frac{16\pi}{15}$$

$$A = \pi(\text{outer radius})^2 - \pi(\text{inner radius})^2$$

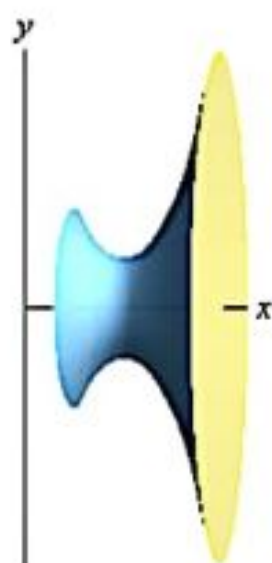
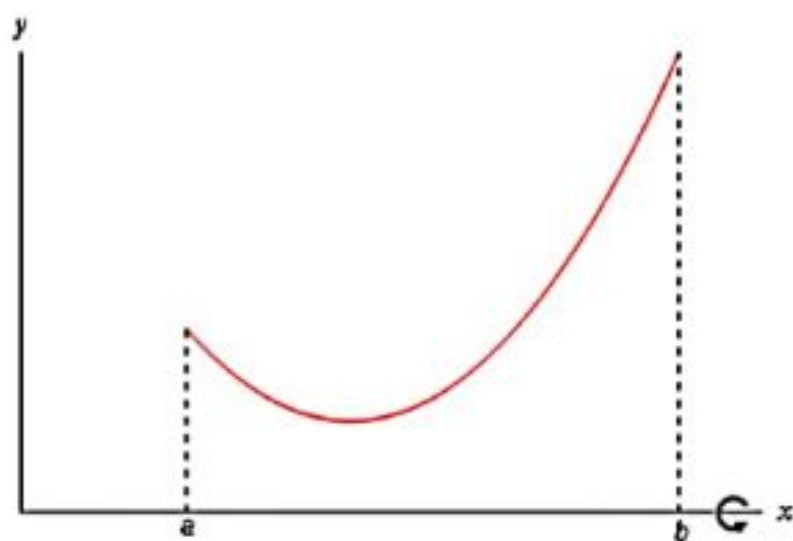


ابيضاً = ١ حله ١٧ ام :

٣, ١٠, ١٤



مروری بر محاسبه احجام (روش دیسک و واشر)



$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$$V = \int_c^d A(y) dy$$

In the case that we get a solid disk the area is,

$$A = \pi (\text{radius})^2$$

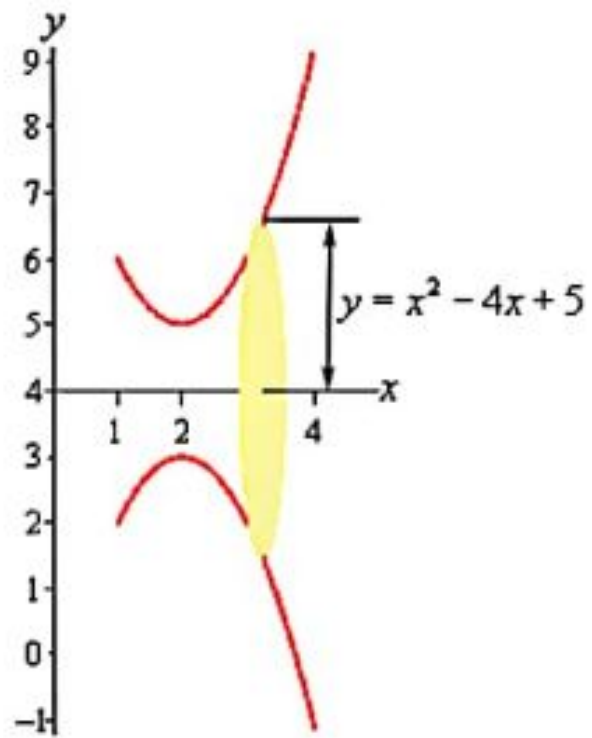
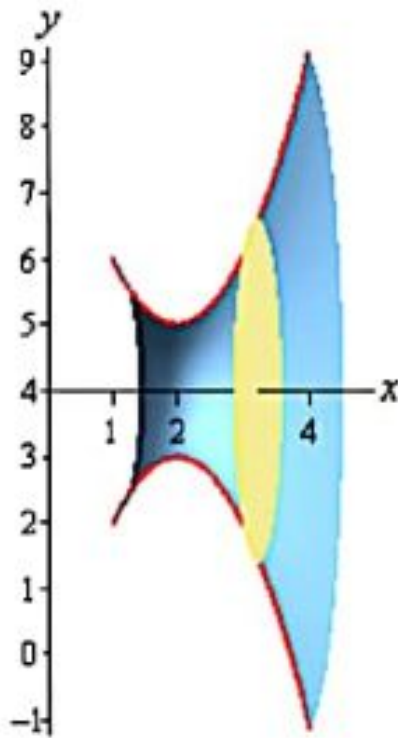
where the radius will depend upon the function and the axis of rotation.

In the case that we get a ring the area is,

$$A = \pi \left(\left(\text{outer radius} \right)^2 - \left(\text{inner radius} \right)^2 \right)$$



Example Determine the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by $y = x^2 - 4x + 5$, $x = 1$, $x = 4$, and the x -axis about the x -axis.



$$A(x) = \pi (x^2 - 4x + 5)^2 = \pi (x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25)$$

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

$$= \pi \int_1^4 x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25 dx$$

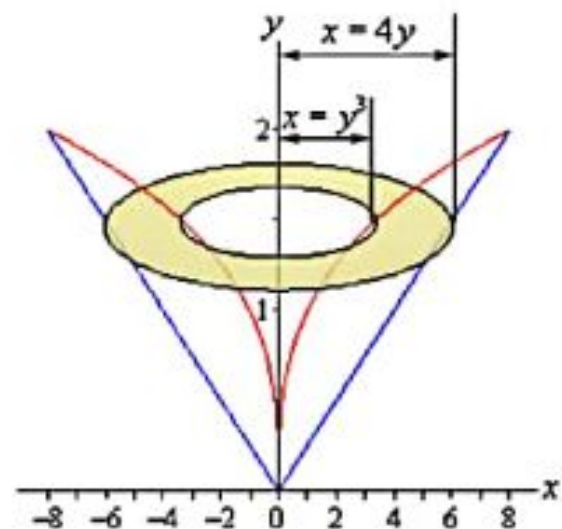
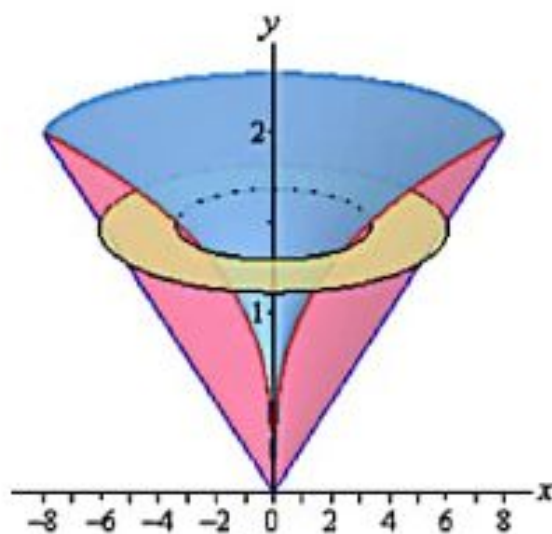
$$= \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{26}{3}x^3 - 20x^2 + 25x \right) \Big|_1^4$$

$$= \frac{78\pi}{5}$$



Example Determine the volume of the solid obtained by rotating the portion of the region bounded by $y = \sqrt[3]{x}$ and $y = \frac{x}{4}$ that lies in the first quadrant about the y -axis.

$$\begin{aligned} y = \sqrt[3]{x} &\Rightarrow x = y^3 \\ y = \frac{x}{4} &\Rightarrow x = 4y \end{aligned}$$

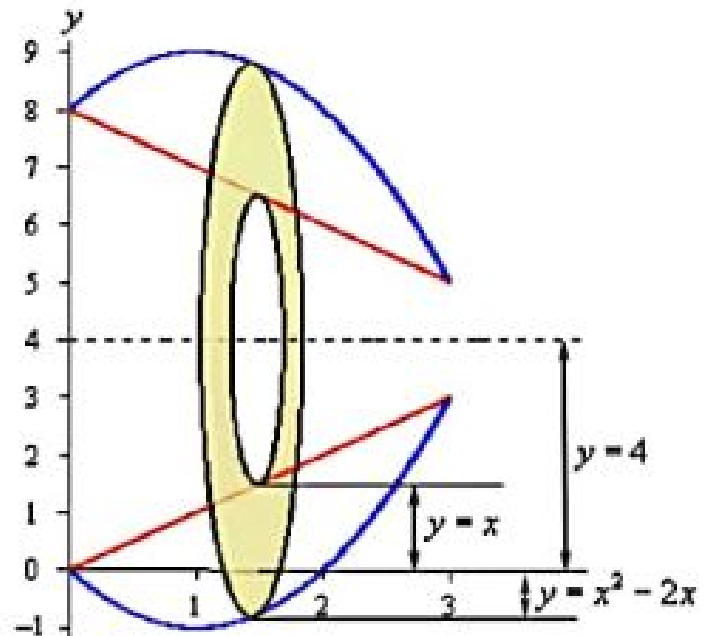
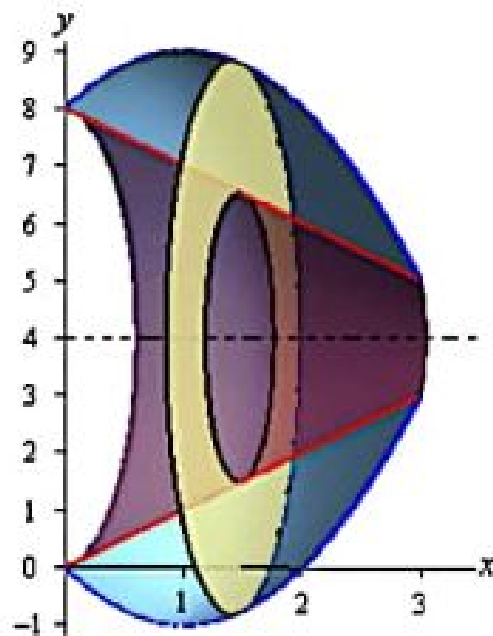


$$A(y) = \pi \left((4y)^2 - (y^3)^2 \right) = \pi (16y^2 - y^6)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d A(y) dy \\ &= \pi \int_0^2 16y^2 - y^6 dy \\ &= \pi \left(\frac{16}{3} y^3 - \frac{1}{7} y^7 \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{512\pi}{21} \end{aligned}$$



Example Determine the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by $y = x^2 - 2x$ and $y = x$ about the line $y = 4$.



$$\text{inner radius} = 4 - x$$

$$\text{outer radius} = 4 - (x^2 - 2x) = -x^2 + 2x + 4$$

$$A(x) = \pi \left((-x^2 + 2x + 4)^2 - (4 - x)^2 \right) = \pi (x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x)$$

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

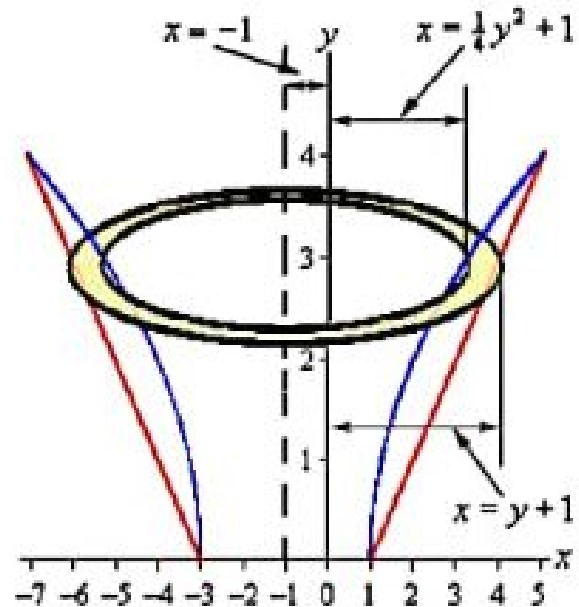
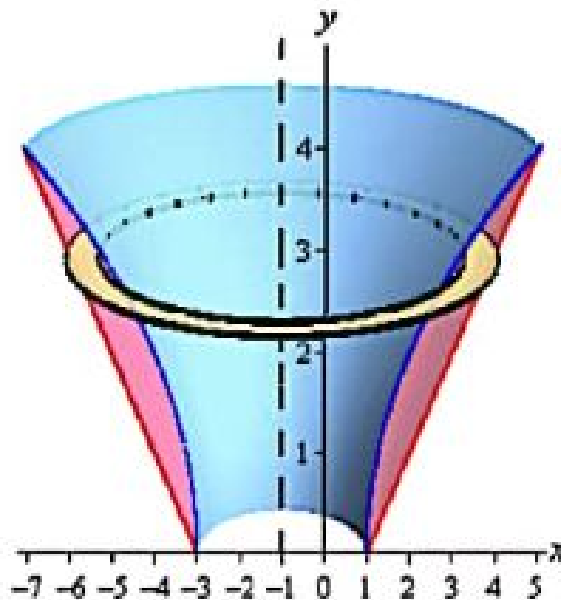
$$= \pi \int_0^3 x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 12x^2 \right) \Big|_0^3$$

$$= \frac{153\pi}{5}$$



Example Determine the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by $y = 2\sqrt{x-1}$ and $y = x-1$ about the line $x = -1$.



$$\begin{aligned} y = 2\sqrt{x-1} & \Rightarrow x = \frac{y^2}{4} + 1 \\ y = x-1 & \Rightarrow x = y+1 \end{aligned}$$

$$\text{outer radius} = y+1+1 = y+2$$

$$\text{inner radius} = \frac{y^2}{4} + 1 + 1 = \frac{y^2}{4} + 2$$

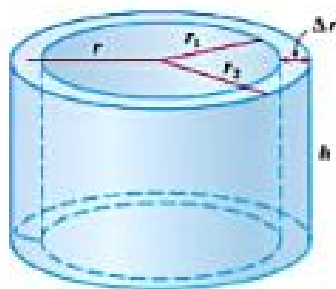
$$A(y) = \pi \left((y+2)^2 - \left(\frac{y^2}{4} + 2 \right)^2 \right) = \pi \left(4y - \frac{y^4}{16} \right)$$

$$V = \int_c^d A(y) dy$$

$$= \pi \int_0^4 4y - \frac{y^4}{16} dy = \pi \left(2y^2 - \frac{1}{80} y^5 \right) \Big|_0^4 = \frac{96\pi}{5}$$



VOLUMES BY CYLINDRICAL SHELLS محاسبه حجم با استفاده از روش پوسته استوانه‌ای

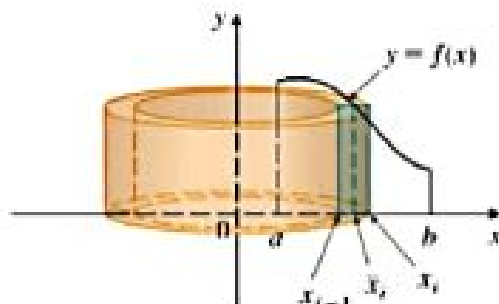
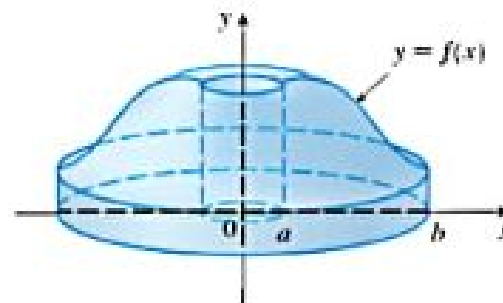
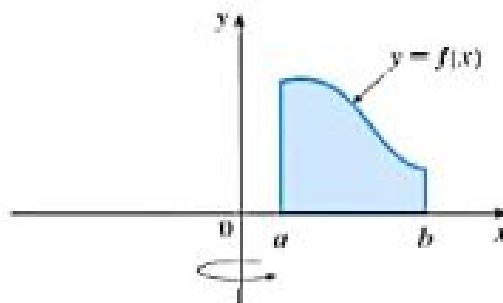


$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

$$V = 2\pi r h \Delta r$$

$$V = [\text{circumference}] [\text{height}] [\text{thickness}]$$

Now let S be the solid obtained by rotating about the y -axis the region bounded by $y = f(x)$ [where $f(x) \geq 0$], $y = 0$, $x = a$, and $x = b$, where $b > a \geq 0$.



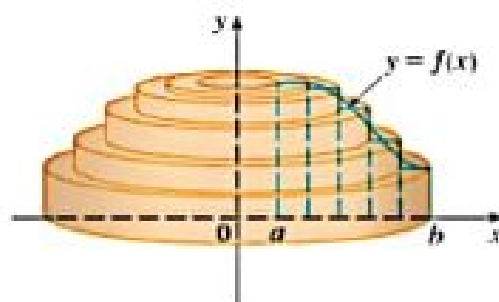
$$V_i = (2\pi \bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)] \Delta x$$

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x$$

This approximation appears to become better as $n \rightarrow \infty$.

But, from the graph, we know that

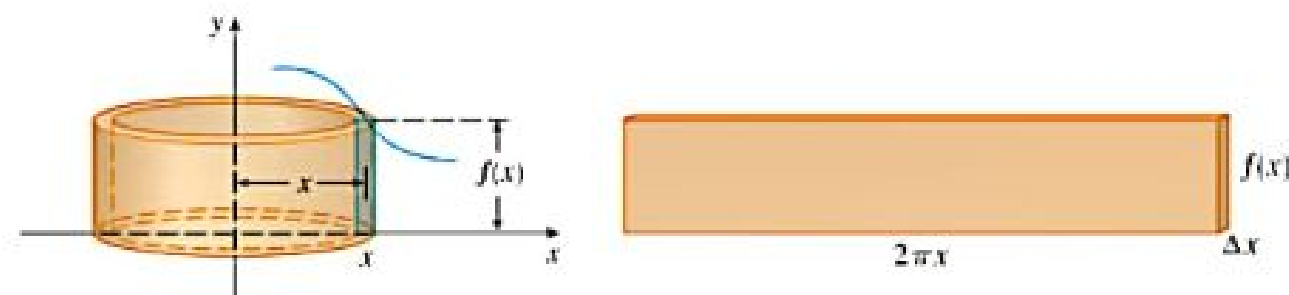
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$



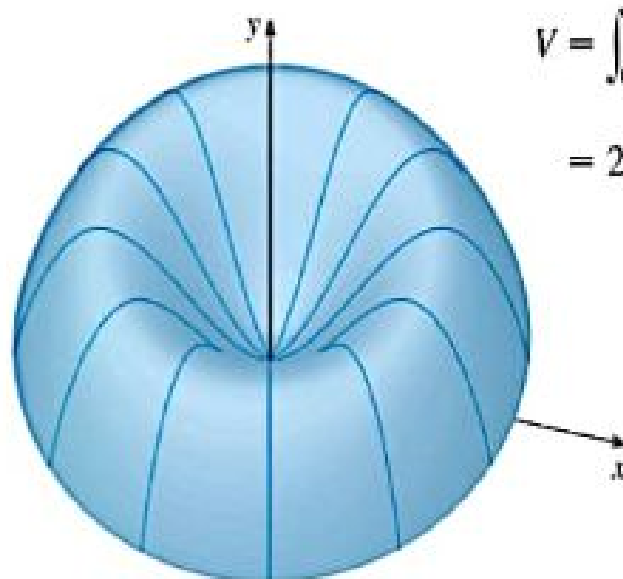
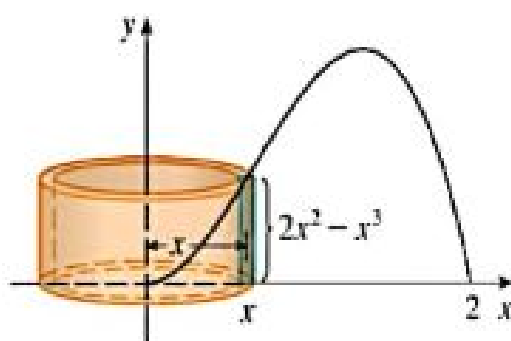
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad \text{where } 0 \leq a < b$$



$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circumference}} \underbrace{[f(x)]}_{\text{height}} \underbrace{dx}_{\text{thickness}}$$



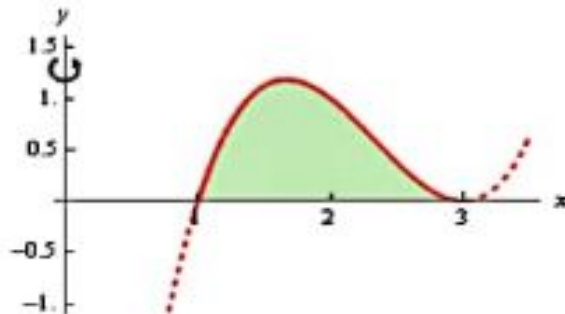
EXAMPLE Find the volume of the solid obtained by rotating about the y -axis the region bounded by $y = 2x^2 - x^3$ and $y = 0$.



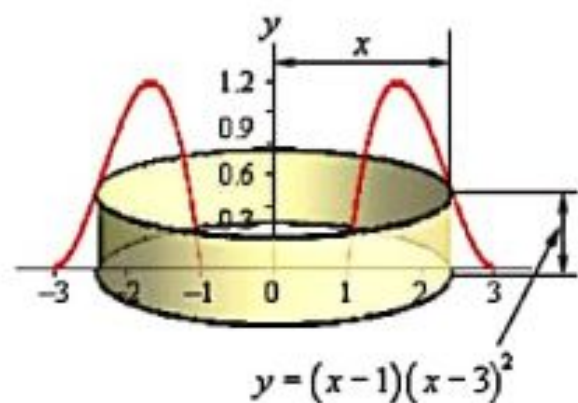
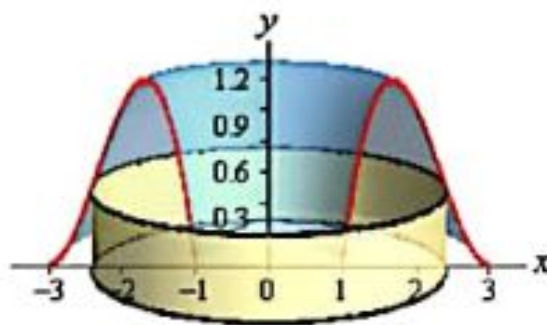
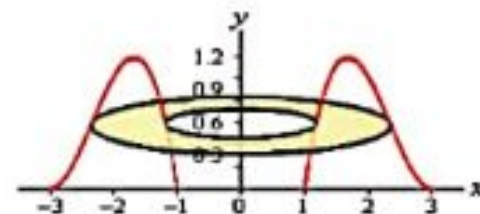
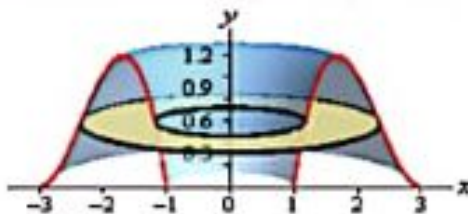
$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3) dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 = 2\pi \left(8 - \frac{32}{5} \right) = \frac{16}{5}\pi \end{aligned}$$



Example Determine the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by $y = (x-1)(x-3)^2$ and the x -axis about the y -axis.

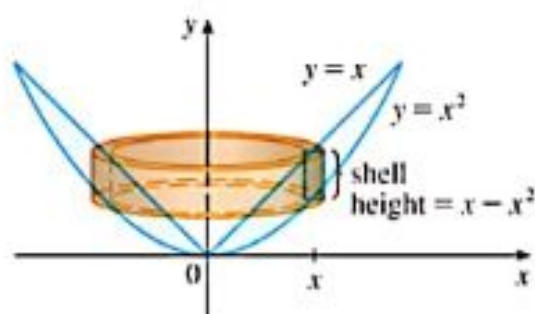


So, we've basically got something that's roughly doughnut shaped. If we were to use rings on this solid here is what a typical ring would look like.



$$\begin{aligned} A(x) &= 2\pi (\text{radius})(\text{height}) = 2\pi (x)((x-1)(x-3)^2) \\ &= 2\pi (x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 9x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x) dx = 2\pi \int_1^3 x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 9x dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{4}x^4 + 5x^3 - \frac{9}{2}x^2 \right) \Bigg|_1^3 = \frac{24\pi}{5} \end{aligned}$$

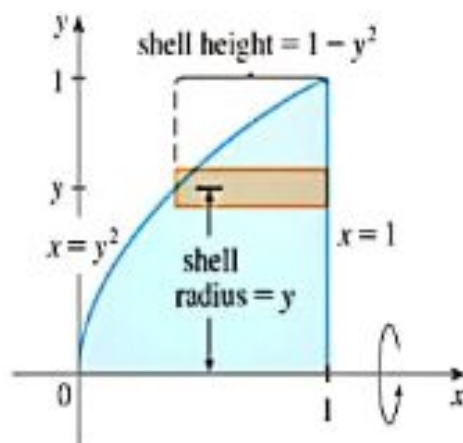


EXAMPLE Find the volume of the solid obtained by rotating about the y -axis the region between $y = x$ and $y = x^2$.

SOLUTION The region and a typical shell are shown in Figure . We see that the shell has radius x , circumference $2\pi x$, and height $x - x^2$. So the volume is

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

EXAMPLE Use cylindrical shells to find the volume of the solid obtained by rotating about the x -axis the region under the curve $y = \sqrt{x}$ from 0 to 1.



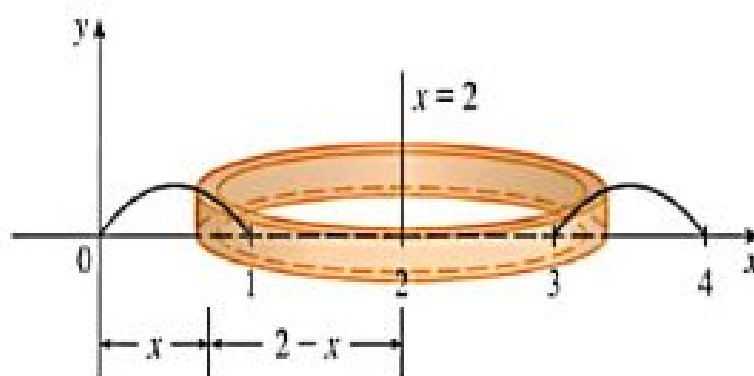
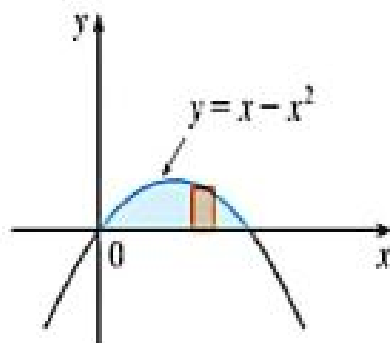
$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2) dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3) dy = 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

In this problem the disk method was simpler.



EXAMPLE Find the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by $y = x - x^2$ and $y = 0$ about the line $x = 2$.

SOLUTION Figure shows the region and a cylindrical shell formed by rotation about the line $x = 2$. It has radius $2 - x$, circumference $2\pi(2 - x)$, and height $x - x^2$.



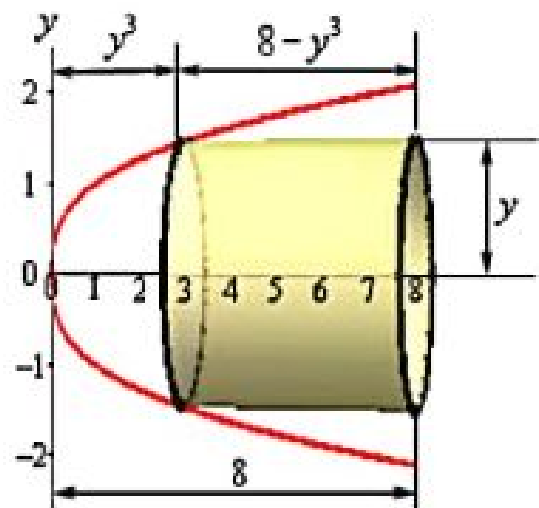
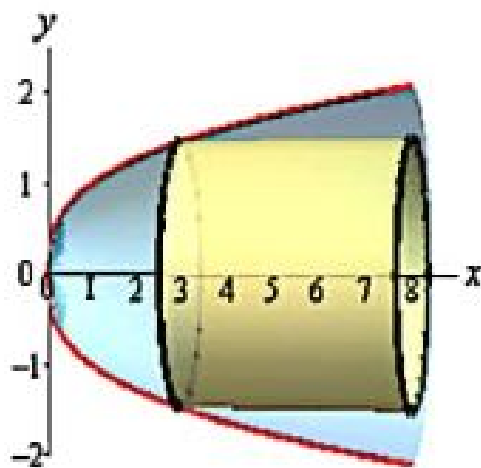
The volume of the given solid is

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



Example Determine the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$ and the x -axis about the x -axis.

$$y = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad x = y^3$$

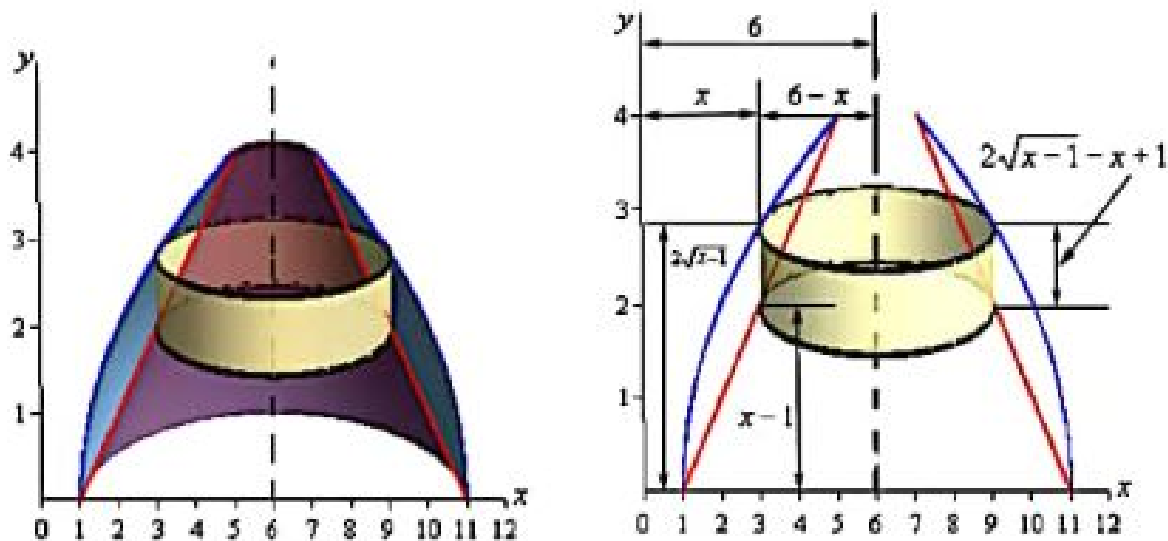


$$\begin{aligned} A(y) &= 2\pi(\text{radius})(\text{width}) \\ &= 2\pi(y)(8 - y^3) \\ &= 2\pi(8y - y^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d A(y) dy \\ &= 2\pi \int_0^2 8y - y^4 dy \\ &= 2\pi \left(4y^2 - \frac{1}{5}y^5 \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{96\pi}{5} \end{aligned}$$



Example Determine the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by $y = 2\sqrt{x-1}$ and $y = x-1$ about the line $x = 6$.



The cross sectional area is

$$\begin{aligned} A(x) &= 2\pi (\text{radius})(\text{height}) \\ &= 2\pi (6-x)(2\sqrt{x-1} - x + 1) \\ &= 2\pi (x^2 - 7x + 6 + 12\sqrt{x-1} - 2x\sqrt{x-1}) \end{aligned}$$

Now the first cylinder will cut into the solid at $x = 1$ and the final cylinder will cut into the solid at $x = 5$ so there are our limits.

Here is the volume.

$$\begin{aligned} V &= \int_1^5 A(x) dx \\ &= 2\pi \int_1^5 (x^2 - 7x + 6 + 12\sqrt{x-1} - 2x\sqrt{x-1}) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x + 8(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_1^5 \\ &= 2\pi \left(\frac{136}{15} \right) = \frac{272\pi}{15} \end{aligned}$$

The integration of the last term is a little tricky so let's do that here. It will use the substitution,

$$\begin{aligned} u &= x-1 & du &= dx & x &= u+1 & \int 2x\sqrt{x-1} dx &= 2 \int (u+1)u^{\frac{1}{2}} du \\ & & & & & & = 2 \int u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} du &= 2 \left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \right) + c &= \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$



Example Determine the volume of the solid obtained by rotating the region bounded by $x = (y-2)^2$ and $y = x$ about the line $y = -1$.

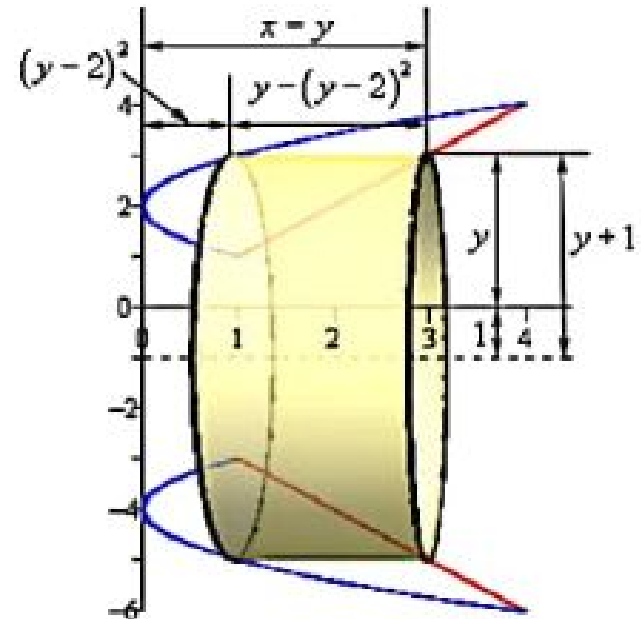
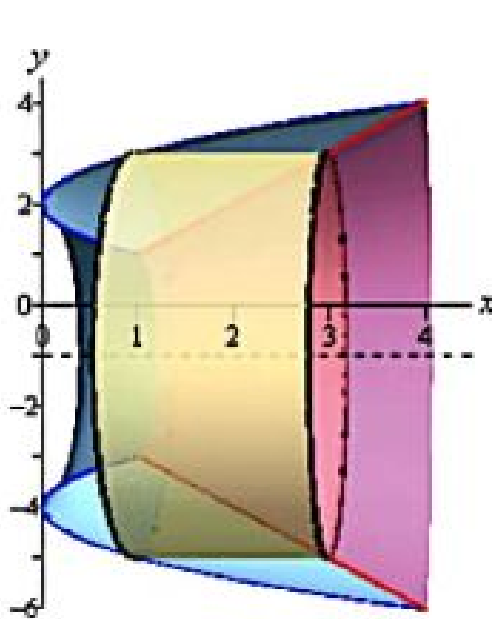
Solution We should first get the intersection points there.

$$y = (y-2)^2$$

$$y = y^2 - 4y + 4$$

$$0 = y^2 - 5y + 4$$

$$0 = (y-4)(y-1)$$



Here's the cross sectional area for this cylinder.

$$\begin{aligned} A(y) &= 2\pi (\text{radius})(\text{width}) \\ &= 2\pi (y+1)(y-(y-2)^2) \\ &= 2\pi (-y^3 + 4y^2 + y - 4) \end{aligned}$$

The first cylinder will cut into the solid at $y = 1$ and the final cylinder will cut in at $y = 4$. The volume is then,

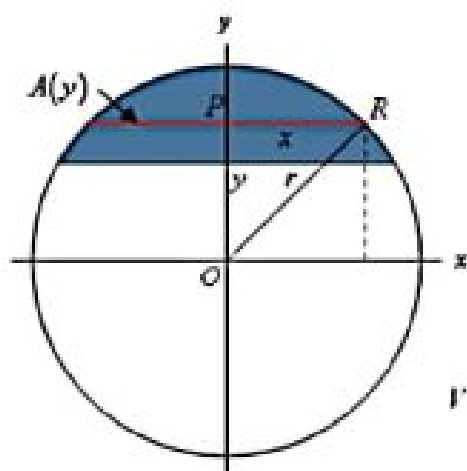
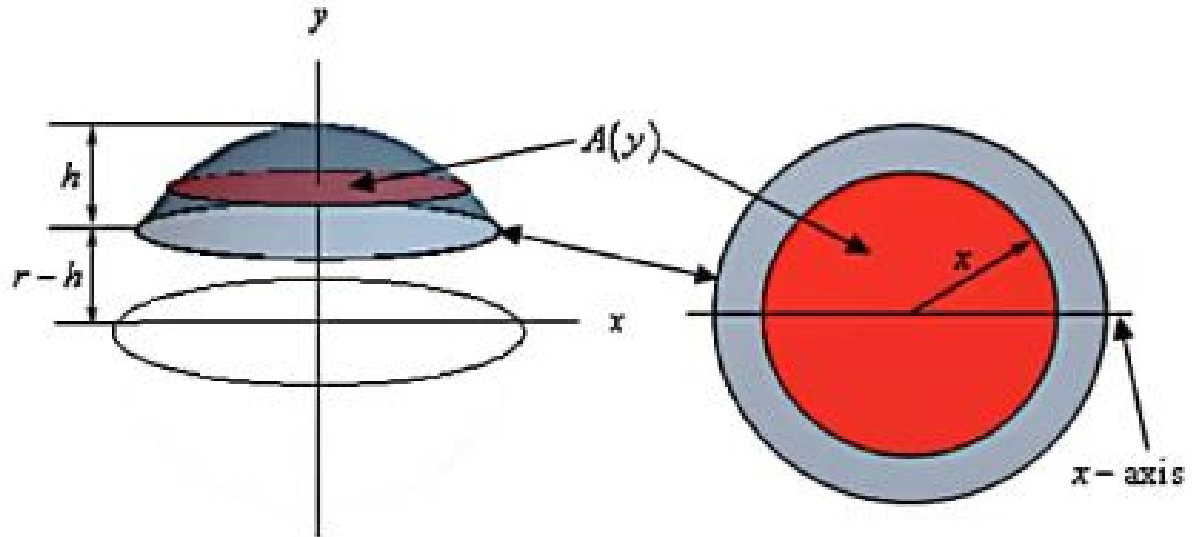
$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 A(y) dy \\ &= 2\pi \int_1^4 (-y^3 + 4y^2 + y - 4) dy \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{4}y^4 + \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 4y \right) \Big|_1^4 \\ &= \frac{63\pi}{2} \end{aligned}$$



Example For a sphere of radius r find the volume of the cap of height h .

Solution

A sketch is probably best to illustrate what we're after here.

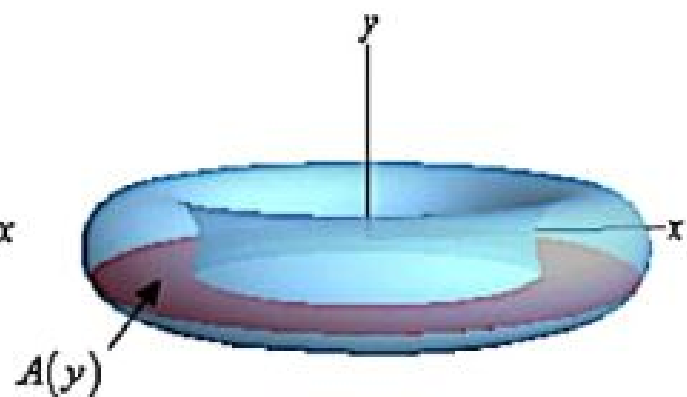
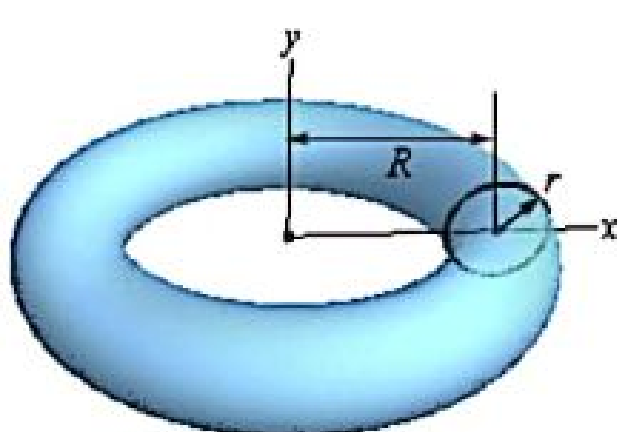


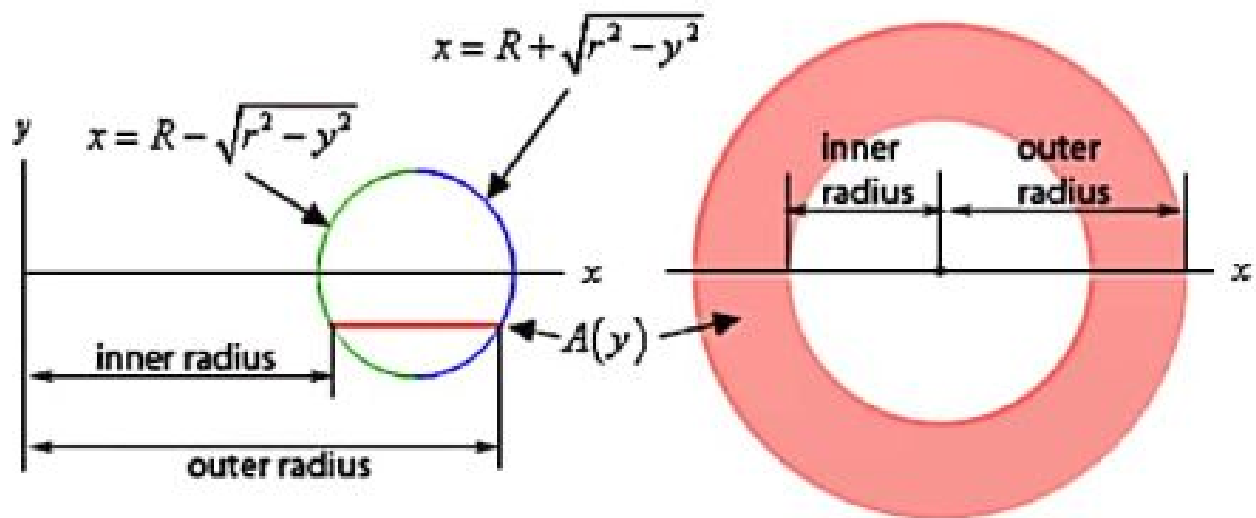
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = r^2 - y^2$$

$$A(y) = \pi(r^2 - y^2)$$

$$V = \int_{r-h}^r \pi(r^2 - y^2) dy = \pi \left(r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{r-h}^r = \pi \left(h^2 r - \frac{1}{3} h^3 \right) = \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3} h \right)$$

محاسبه حجم تیوب تاور





Notice that the inner radius will always be the left portion of the circle and the outer radius will always be the right portion of the circle. Now, we know that the equation of this is,

$$(x - R)^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{inner radius : } x = R - \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$\text{outer radius : } x = R + \sqrt{r^2 - y^2}$$

The cross-sectional area is then,

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi (\text{outer radius})^2 - \pi (\text{inner radius})^2 \\ &= \pi \left[\left(R + \sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 \right] \\ &= \pi \left[R^2 + 2R\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - y^2 - \left(R^2 - 2R\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - y^2 \right) \right] \\ &= 4\pi R\sqrt{r^2 - y^2} \end{aligned}$$

Next, the lowest cross-section will occur at $y = -r$ and the highest cross-section will occur at $y = r$ and so the limits for the integral will be $-r \leq y \leq r$.

The integral giving the volume is then,

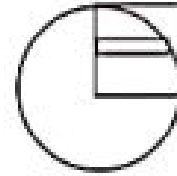
$$V = \int_{-r}^r 4\pi R\sqrt{r^2 - y^2} dy = 2 \int_0^r 4\pi R\sqrt{r^2 - y^2} dy = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy$$



We know that the equation of the circle is $x^2 + y^2 = r^2$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

for $0 \leq y \leq r$



$$A = \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \, dy = \frac{1}{4} \pi r^2$$

So, putting all this together the volume of the torus is then,

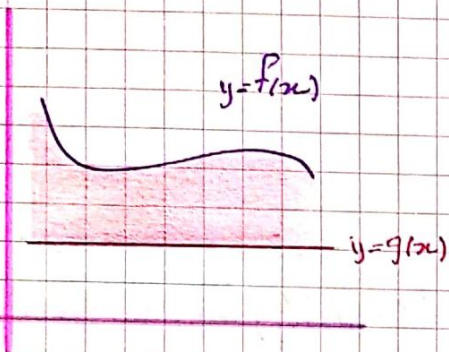
$$V = 8R\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \, dy = 8\pi R \left(\frac{1}{4} \pi r^2 \right) = 2R\pi^2 r^2$$

ایضاً - ۱ جمله ۱۷ ام :

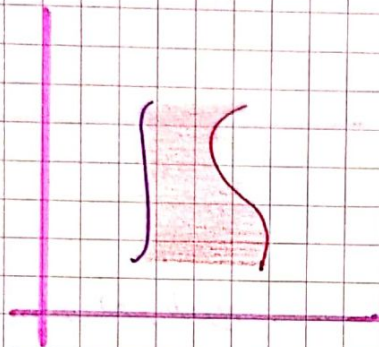
۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰

ایضاً - ۱ جمله ۱۸ ام

۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰



a) نوار قائم



b) نوار افقی

(یادآوری: انتگرال نوار قائم یا افقی)

در شکل α نوار قائم را انتگرال می‌گیریم

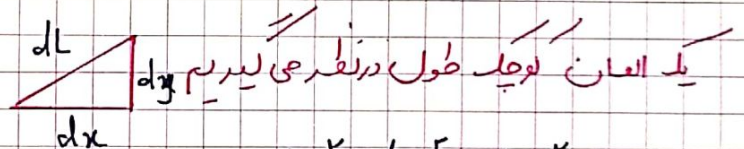
چون در صورت انتگرال نوار افقی،

صفحه‌ی نقش نوار را قطع می‌کرد و

عبور به نوشتن چندین انتگرال می‌شدیم

اما با نوار قائم فقط یک انتگرال نیاز می‌بود. شکل (b) هم به همین ترتیب.

محاسبه طول منحنی



پس : $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$L \rightarrow dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

حالا آن dx^2 را می‌توانیم بنویسیم :

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

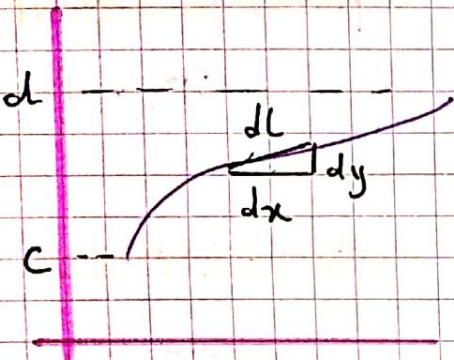
این طول یکی از العان‌ها بوده. برای بدست آوردن طول کل منحنی باید همه العان‌ها را جمع کنیم.

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

(این جابجیه انتگرال گیری است)

sam

حالا که میخوای استلزال گیری را باشد : $x = g(y)$



$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

این معادله dy^2 او خالصه گیری

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

مثال :

منحنی با رابطه $y = 4 \cosh\left(\frac{x}{4}\right)$ را در نظر بگیرید .

طول کمانی از این منحنی از نقطه‌ای به طول ۰ تا نقطه‌ای به طول $4 \ln 4$ را بدست آورید .

$$L = \int_0^{4 \ln 4} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{4}} dx = \int_0^4 \cosh \frac{x}{4} dx = 4 \sinh \frac{x}{4} \Big|_0^{4 \ln 4}$$

$$= 4 \sinh \frac{4 \ln 4}{4} - 4 \sinh 0 = \frac{e^{\ln 4} - e^{-\ln 4}}{2} = 2 \left(4 - \frac{1}{4}\right) = 17.5$$

(توجه : $e^{\ln x} = x$)

مغایبه طول کمان تابع پارامتری

فرض کنید $x = f(t)$ و $y = g(t)$ ضمیمه به گونه ای که
 f' و g' اوی بازه $[a, b]$ پیوسته باشند در این صورت طول کمان از منحنی C
 از نقطه $(f(a), g(a))$ تا نقطه $(f(b), g(b))$ به صورت زیر خواهد بود:

چون مقیاس t همواره ضرب می شود در dt

$$dL = (dx)^2 + (dy)^2 \rightarrow dt$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt$$

مثال ثابت کنید محیط دایره ای به شعاع R برابر $2\pi R$ است

معادله پارامتری دایره

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$$

$$P = \int_0^{2\pi} \sqrt{(R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt$$

$$P = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} R dt$$

$$P = R t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R$$

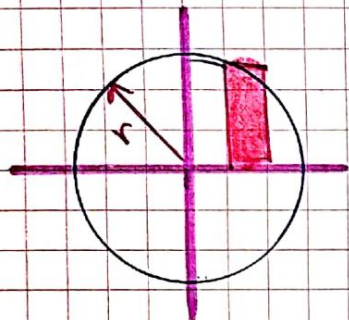
آه یعنی بود چی؟

استدلال های بیهوده کامل نشن

مثال:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

در حالت عادی باید این استدلال را با تغییر متغیر مثلثاتی حل می‌کنیم (مثلاً $x = r \sin \theta$) ولی ما می‌توانیم $x^2 + y^2 = r^2$ (مربع دایره) را به کار ببریم.



$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$dA = \int \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad \text{حالت زیر نمودار}$$

$$A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{4} \quad \text{پس می‌توانیم بگوییم}$$

۲. بدون حساب به سادگی می‌توانیم با مساحت ربع دایره.

$$A = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{4} \quad (\text{حالت نیم دایره})$$

منحنی پارامتری $x = t^3$ و $y = 2t^2$ را در نظر بگیرید. طول کمان از این منحنی را از $t=0$ تا $t=1$ بیابید.

$$\int_0^1 \sqrt{(1^3 t)^2 + (3t^2)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{14 + 9t^2} dt = \frac{1}{18} \left(\frac{2}{3} \right) (9t + 14)^{3/2} \bigg|_{t=0}^{t=1}$$

تغییری به

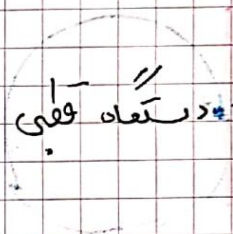
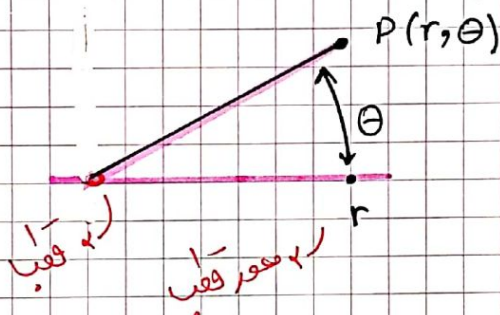
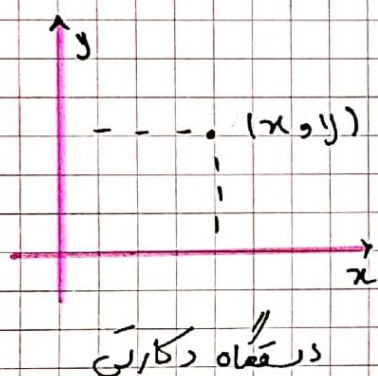
$$= \frac{1}{27} (25^{3/2} - 14^{3/2}) = \frac{41}{27}$$

می‌توانیم به جای به‌دوختن فضای استدلال از $t=1$ به $t=0$ بدان استدلال را دقیقاً معکوس کنیم.

دستگاه مختصات قطبی

(polar Coordinate)

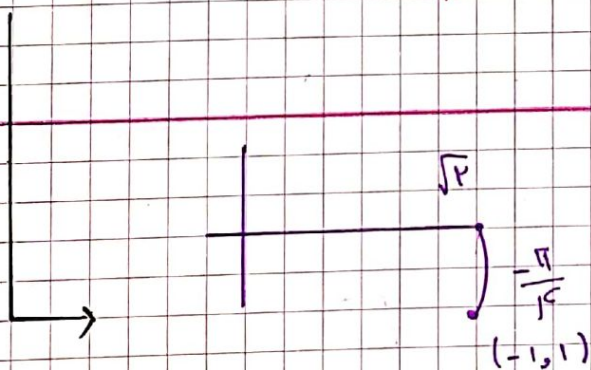
معانی یک نقطه در صفحه را علاوه بر مختصات دکارتی، مختصات قطبی نیز می‌توان نشان داد.
در مختصات قطبی تغییر نقطه (x, y) به نقطه (r, θ) خواهد بود.
(r همان θ زاویه است)



مثال: مختصات نقطه $(-1, 1)$ را در دستگاه مختصات قطبی $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ بیابید. $x \neq 0$

$$(1, -1) \rightarrow r = \sqrt{2}, \theta = \tan^{-1} \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4} = \gamma \left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right)$$

نقطه $(-1, 1)$ در ربع چهارم قرار دارد پس برای تعیین $\frac{3\pi}{4}$ او قبول کنیم چون ربع دوم نقطه $-\frac{\pi}{4}$ قابل قبوله.



$$r = f(\theta)$$

$$r = a \cos \theta$$

$$r = b \sin \theta$$

$$r = a + b \sin \theta$$

$$r = a + b \cos \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

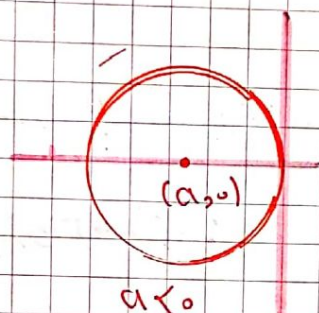
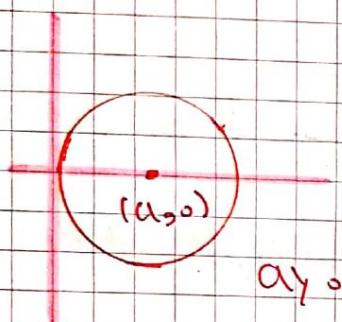
(قطبی رو به دکارتی تبدیل می‌کنیم)

معادلات زیر را توصیف نمایید.

$$r = r_a \cos \theta$$

$$\rightarrow r^2 = r_a r \cos \theta \quad \frac{r^2 = x^2 + y^2}{x = r \cos \theta} \rightarrow x^2 + y^2 = r_a x \Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

(شکل معادله دایره به شعاع a و مرکز $(a, 0)$)

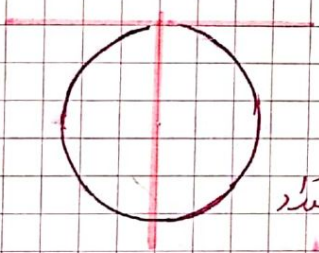
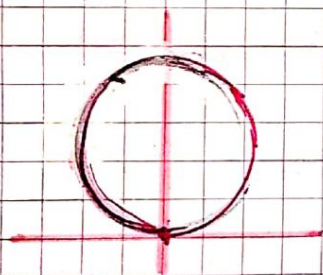


معادله قطبی دایره‌ای به شعاع $|a|$ و محاس π محور $\frac{\pi}{2}$ (یا $\frac{3\pi}{2}$) که مرکز آن در امتداد محور قطبی (x یا y) قرار دارد. اگر $a < 0$ در طرف راست محور قطبی و اگر $a > 0$ در طرف چپ محور قرار دارد.

$$r = r_b \sin \theta$$

$$\rightarrow r^2 = r_b r \sin \theta \rightarrow x^2 + y^2 = r_b y \rightarrow x^2 + (y-b)^2 = b^2$$

(دایره‌ای به شعاع b و مرکز $(0, b)$)



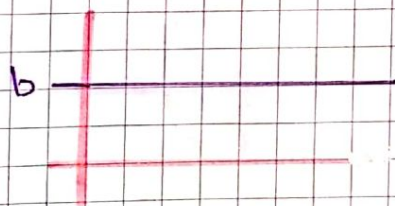
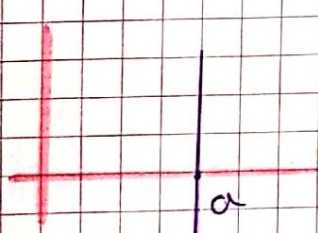
به طبع $r = r_b \sin \theta$ معادله قطبی دایره‌ای است که شعاع آن $|b|$ بوده و مرکز آن در امتداد محور $\frac{\pi}{2}$ (یا $\frac{3\pi}{2}$) قرار دارد.

$$a = r \cos \theta$$

$$\rightarrow a = x \quad \text{خط عمود}$$

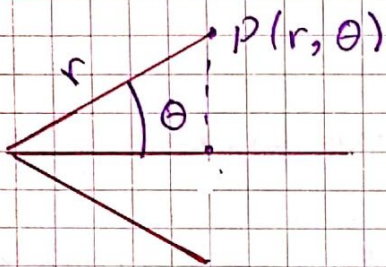
$$b = r \sin \theta$$

$$\rightarrow b = y \quad \text{خط افقی}$$



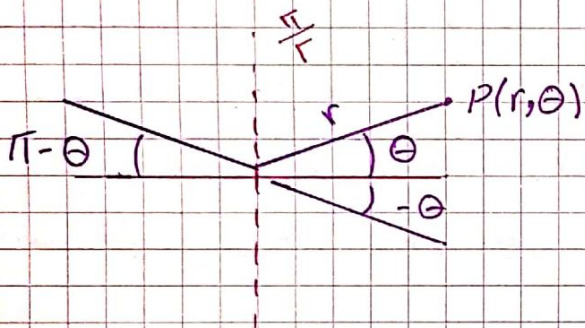
۱) یک نمودار قطبی نسبت به محور قطبی متقارن است اگر با تبدیل θ به $-\theta$ تغییری در

معادله حاصل نشود.



۲) یک نمودار قطبی نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است هرگاه با قدر دادن $(r, \pi - \theta)$ یا $(-r, -\theta)$

به جای (r, θ) در معادله تغییری ایجاد نشود.



۳) اگر با تغییر r به $-r$ معادله تغییر نکند نسبت به خط

متقارن است. مثل $r = \sin \theta$

نمودارهای حلزونی

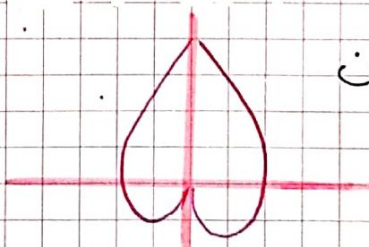
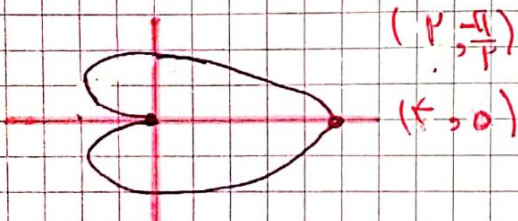
نمودارهای حلزونی به صورت $r = a + b \cos \theta$ یا $r = a + b \sin \theta$ می باشند

اگر $a = b$ حلزونی را دل نام می نهند. مانند $r = 1 + \cos \theta$

$$r = 1 + \cos \theta \rightarrow \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$r = 1 + \sin \theta$$

حلزونی شبیه به دل نام چون ۲ و ۳ بهم نزدیکند



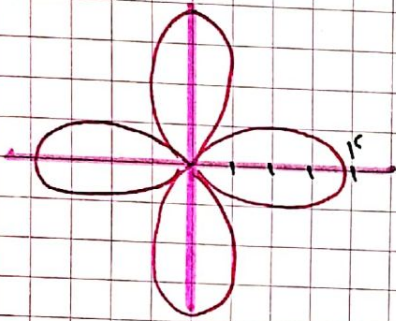
$$\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(1, 0\right)$$

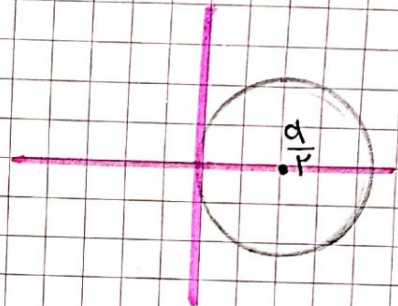
$$\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

معادلات $r = a \sin(n\theta)$ و $r = a \cos(n\theta)$
 معادله یک گل میباشند که n پاره دارد. اگر n فرد باشد و n زوج باشد.

$r = 4 \cos 2\theta$ → سیارک به محور افقی



$r = a \sin \theta$, $r = a \cos \theta$



مباحثات ۱ - ۱۹ ام

۱۴۰۳، ۱۰، ۱۱

محاسبه طول کمان صحنی C با معادله قطبی $r = f(\theta)$

اگر f' روی $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشد داریم:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$x = f(\theta) \cos \theta \quad y = f(\theta) \sin \theta$$

$$= \frac{dx}{dt} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta$$

$$, \frac{dy}{dt} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta$$

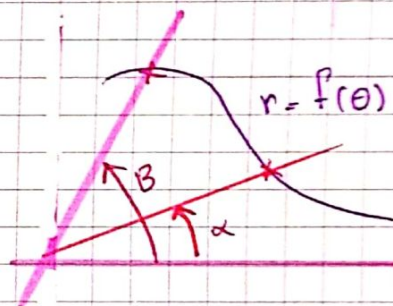
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left[(f'(\theta)\cos\theta)^2 - r(f'(\theta)\sin\theta)(f''(\theta)\cos\theta) + (f'(\theta)\sin\theta)^2 \right] + \left[(f'(\theta)\sin\theta)^2 + r(f'(\theta)\sin\theta)(f''(\theta)\cos\theta) + (f'(\theta)\cos\theta)^2 \right]$$

$$= (f'(\theta))^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + (f'(\theta))^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= r \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = (f'(\theta))^2 + (f'(\theta))^2$$

منفی طول قوس:

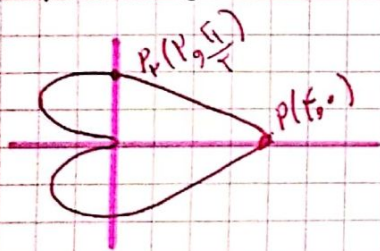
$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$



$$r = r + r \cos\theta$$

$$(r, 0) \quad (r, \frac{\pi}{2})$$

(1) طول دل سارا معادله کنید



چون تقارن دارد میتوان نصف نصف حساب کنیم

$$L = r \int_0^{\pi} \sqrt{(r + r \cos\theta)^2 + (-r \sin\theta)^2} d\theta$$

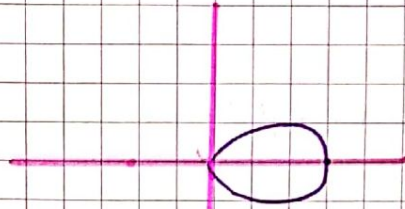
$$L = r \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta} d\theta = 2\sqrt{r} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta} d\theta$$

$$2\sqrt{r} \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} d\theta = 2\sqrt{r} \int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta = 4\sqrt{r} \sin\frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 4\sqrt{r}$$

پیرامون یکی از گن ها را حساب کنید.

$$r = f \cos^2 \theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$



$$f \cos^2 \theta = 0 \Rightarrow r \theta = \pm \frac{\pi}{p}$$

$$\theta = \pm \frac{\pi}{p}$$

شکل

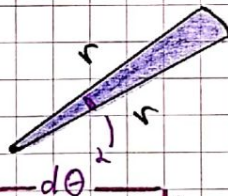
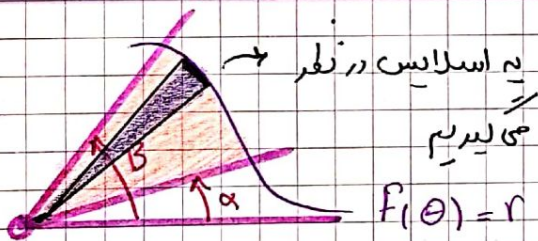
باید بین از چه تا چه شروع و به چه به چه

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{p}} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{p}} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{p}} \sqrt{(f \cos^2 \theta)^2 + (15 \sin^2 \theta)^2} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{p}} \sqrt{(14 \cos^2 \theta + 45 \sin^2 \theta)} d\theta =$$

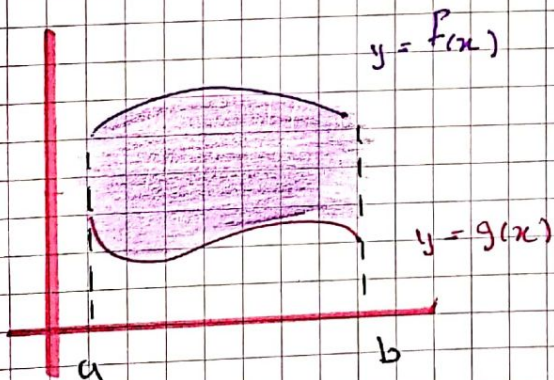
محاسبه مساحت در دستگاه مختصات قطبی



$$dA = \frac{r^2}{2} d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta$$

مساحت کل (تمام مساحت ها)

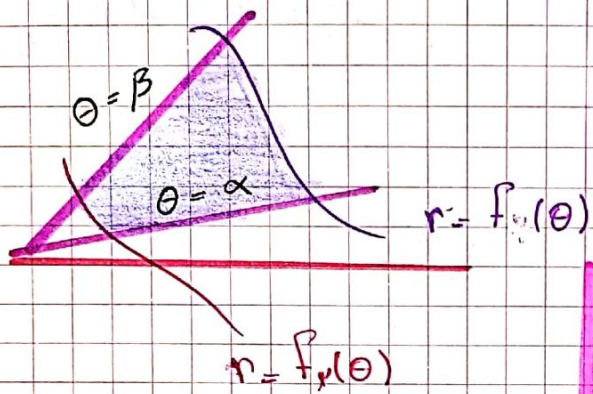


مساحت بین دو تابع

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

مساحت

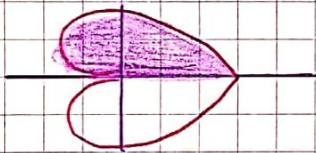
هفتین :



(کریه لایه لایه - بنزله لایه لایه)

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f_1(\theta)^2 - f_2(\theta)^2) d\theta$$

مثال: مساحت دایره $r = 2 + 2\cos\theta$ را محاسبه کنید.



نصف دایره
نصف r میانه

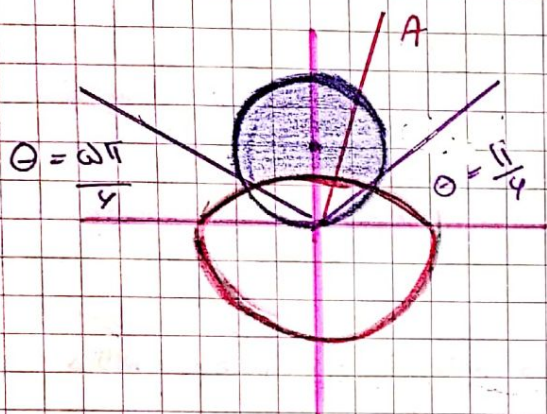
$$A = \frac{1}{2} (2) \int_0^{\pi} (2 + 2\cos\theta)^2 d\theta$$

$$\Rightarrow A = 2 \int_0^{\pi} (1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} (1 + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) + 2\cos\theta) d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} (\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + 2\cos\theta) d\theta = 2 \left(\frac{3\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + 2\sin\theta \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= 2 \left(\frac{3\pi}{2} \right) = 4\pi$$

مساحت ناحیه درون دایره $r = 3 \sin \theta$ و بیرون حلقه $r = 2 - \sin \theta$ را محاسبه کنید



۱) معادله دایره و حلقه را قوی داده شده پس با استبدال
قوی حلقه می کنیم، اول تابع ها رو به خورد صیریم تا
 θ ۲ تابع بدست بیاد:

$$3 \sin \theta = 2 - \sin \theta \quad \text{پس} \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad \frac{5\pi}{4}$$

۲) بدین ترتیب که اگر A می کنیم. حالا: $(r^2 \text{ دایره} - r^2 \text{ حلقه})$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} ((3 \sin \theta)^2 - (2 - \sin \theta)^2) d\theta =$$

تابع قدرتهای یکسان رو حذف
استبدال اون قدر $\frac{1}{2}$ میکنیم.

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} ((3 \sin \theta)^2 - (2 - \sin \theta)^2) d\theta$$

دلیل اینکه $\cos \frac{\pi}{4}$ نه $\cos$ او
صاف میکنیم و فقط کار محاسبه آسون میشه.

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (9 \sin^2 \theta - (4 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta)) d\theta$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (8 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 4) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (4(1 - \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta - 4) d\theta$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (4 \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) d\theta = 4 \left(-\cos \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$

$$-2 \left(0 + 0 \right) - (-2) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 2 \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

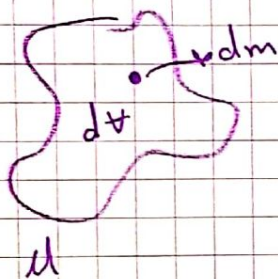
مرکز جرم جرم

نقطه مرکز جرم: نقطه ای که در آن گشتاور (moment) صفر است.

در جسم های همگن: $P = \frac{\mu}{V}$ (جرم مخصوص)

اگر جسم همگن نبود چطور باید جرم جرم او حساب کرد؟

پدیده های انتگرالی می بینیم (المان کوچک جرم).



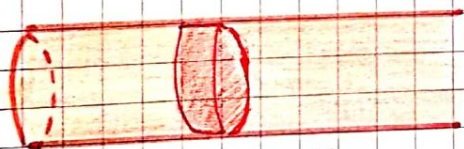
پس: $P = \frac{dm}{d\theta}$ ← $dm = P d\theta$ (المان کوچک جرم)

$$\mu = \int P d\theta$$

حالا اگر اشتغال بگیریم μ (جرم کل) بدست میاریم:

(اشتغال حجم به گانه می شه. برای اینکه بتوینیم حل کنیم صفحات او واحد نفر می گیریم تا تبدیل به سطح بشه).

مثال: جرم میلای با سطح مقطع $A = 1 \text{ m}^2$ و طول $L = 1 \text{ m}$ را که جرم مخصوص آن در امتداد طولی به صورت $P(x) = 1 + \sqrt{x}$ صیانت را معادله کنید.

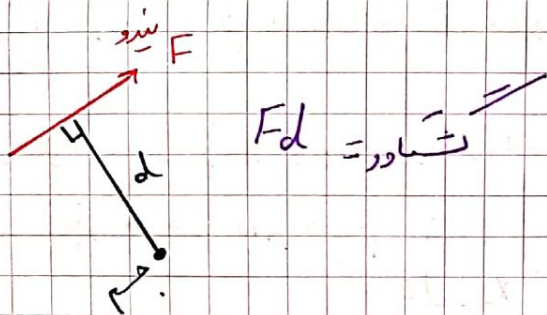


$f(0) = 1$ و $f(1) = 2$ پس جرم همگن نیست

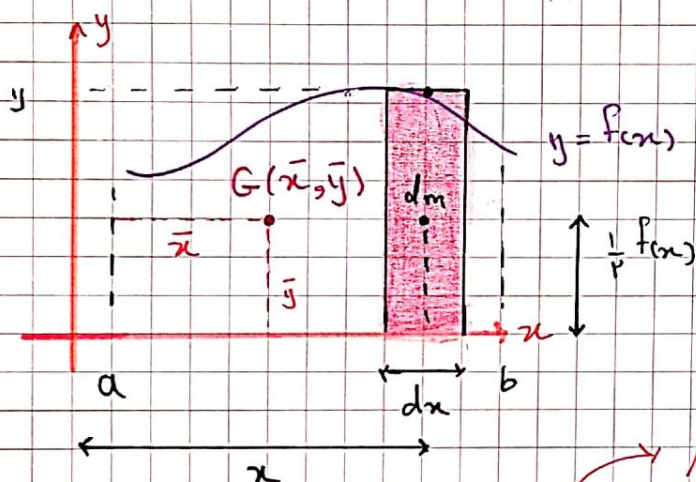
باید اشتغال بگیریم. جرم رو به بعد تبدیل می کنیم: $d\theta = A dx$ پدیده با صفحات کم عددی می بینیم.

$$\mu = \int P d\theta = \int P_x A dx = \mu = \int_0^1 P dx = \left(x + \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{3}$$

مقدمات مرکز جرم (مرکز ثقل)



محور مقدمات، ابتدا (یا $\bar{x}$) و بدست بیایم:



$$dm = \rho dA$$

$$dA = 1 \times (dx) f(x) \quad \text{ضخامت و ارتفاع}$$

$$dm = \rho f(x) dx$$

$$M = \int_a^b \rho f(x) dx$$

جرم کل

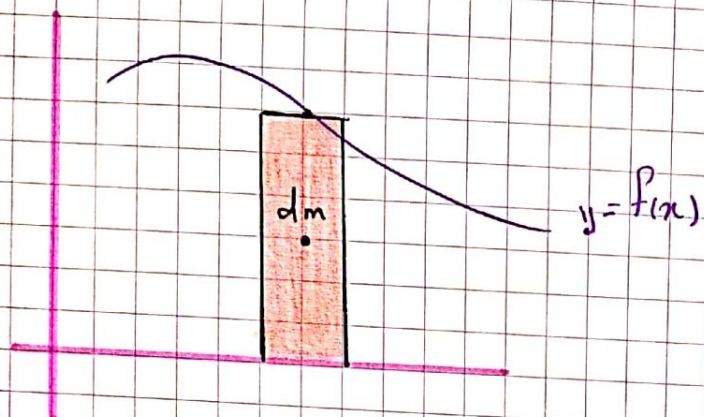
$$M \bar{x} = x dm$$

$$M \bar{x} = \int_a^b x \rho f(x) dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \rho f(x) dx}{\int_a^b \rho f(x) dx} \quad \text{مرکز ثقل باشد} \rightarrow \bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$M \bar{y} = \int_a^b \frac{1}{\rho} (f(x))^2 dx$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{\rho} (f(x))^2 dx}{\int_a^b \rho f(x) dx} \quad \text{جرم هتک} \rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{1}{\rho} \int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$



به طور کلی

اگر (x_c, y_c) مرکز جرم باشد

تنگه بزرگ و $G(x_c, y_c)$ جرم

در حالت کلی می‌توانیم بگوییم:

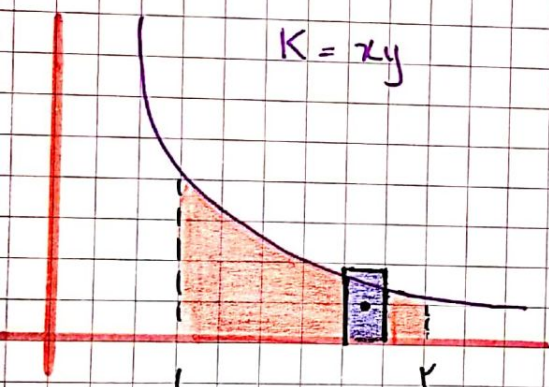
$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A}$$

(اینها جرم‌ها و y_c که حجم بود)

جای A می‌باشد که L طول بود

که در سطح قسمت هاشور خورده، ابعاد به کسب



نکته: $\bar{x}$ باید از K کوچکتر باشد چون قسمت چپ سنگین‌تره

$$dA = \frac{K}{x} dx \quad y = \frac{K}{x}$$

نوار هاشور می‌گیریم که با y اشتغال داشته

$$\bar{x} = \frac{\int_1^2 x \frac{K}{x} dx}{\int_1^2 \frac{K}{x} dx} = \frac{\int_1^2 K dx}{\int_1^2 \frac{K}{x} dx} = \frac{x \Big|_1^2}{\ln x \Big|_1^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_1^2 \frac{1}{x} \left(\frac{K}{x}\right)^2 dx}{\int_1^2 \frac{K}{x} dx} = \frac{\frac{1}{K} \int_1^2 \frac{K^2}{x^2} dx}{\int_1^2 \frac{K}{x} dx} = \frac{\frac{1}{K} \left(-\frac{K}{x}\right) \Big|_1^2}{\ln x \Big|_1^2} = \frac{-\frac{K}{2} - (-K)}{\ln 2} = \frac{K}{2 \ln 2}$$

رياضيات ۱ - عمل ۲.۰

۱۷، ۱۰، ۱۴.۳

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A}$$

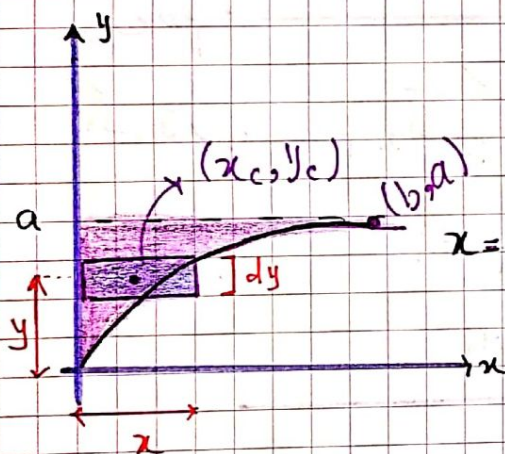
یادآوری:

(یا G) مرکز سطح و (x_c, y_c) و مرکز جرم

که به dA ، dV یا dM مرکز جرم نسبت می‌دهد.

Center of Gravity (مرکز ثقل) Center of mass (مرکز جرم) Centroid (مرکز سطح)

مثال: مرکز سطح قسمت هائوز خورده را حساب کنید.



$$dA = Ky^r dy, \quad b = Ka^r \Rightarrow K = \frac{b}{a^r}$$

$$x = Ky^r \quad (\text{معادله منحنی افقی})$$

$$\hookrightarrow dA = \frac{b}{a^r} y^r dy$$

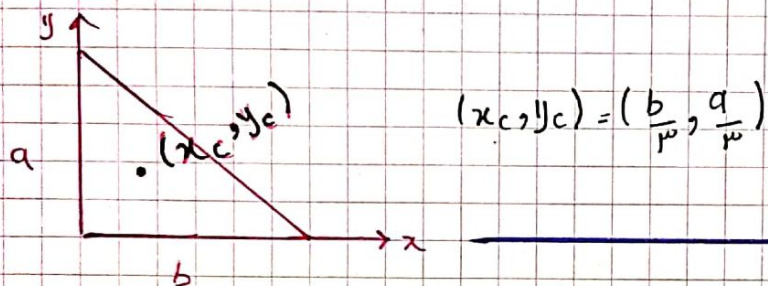
$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A} = \frac{x_c = \frac{x}{r} = \frac{Ky^r}{r}}{\int_0^a \frac{1}{r} \left(\frac{b}{a^r} y^r \right) dA} = \frac{dA = \frac{b}{a^r} y^r dy}{\int_0^a \frac{1}{r} \left(\frac{b}{a^r} y^r \right) dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \frac{1}{r} \left(\frac{b}{a^r} \right) y^r \frac{b}{a^r} y^r dy}{\int_0^a \frac{b}{a^r} y^r dy} = \frac{\frac{b}{r a^r} \int_0^a y^{2r} dy}{\frac{b}{r a^r} \int_0^a y^r dy} = \frac{\frac{b}{r a^r} \left[\frac{y^{2r+1}}{2r+1} \right]_0^a}{\frac{b}{r a^r} \left[\frac{y^{r+1}}{r+1} \right]_0^a} =$$

$$\frac{b}{r a^r} \times \frac{r}{a} a^r = \frac{1}{2r+1} b$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a y_c \frac{b}{a^2} y^2 dy}{\int_0^a \frac{b}{a^2} y^2 dy} = \frac{\int_0^a y \frac{b}{a^2} y^2 dy}{\int_0^a \frac{b}{a^2} y^2 dy} = \frac{\int_0^a y^3 dy}{\int_0^a y^2 dy} = \frac{\left. \frac{y^4}{4} \right|_0^a}{\left. \frac{y^3}{3} \right|_0^a} = \frac{3}{4} a$$

اگر مثلث قائم الزاویه داشته باشیم به اصطلاح a و b مرکز ثقل اصطلاحاً معلوم می‌باشد $\frac{1}{3}$ باشد.



روش دوم:

اگر تونی جسم رو تقسیم کنی به قطعاتی که میدونی مرکز ثقل هر کدامه لافاست:

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ci} \Delta A_i}{\Delta A_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} \Delta A_i}{\Delta A_i}$$

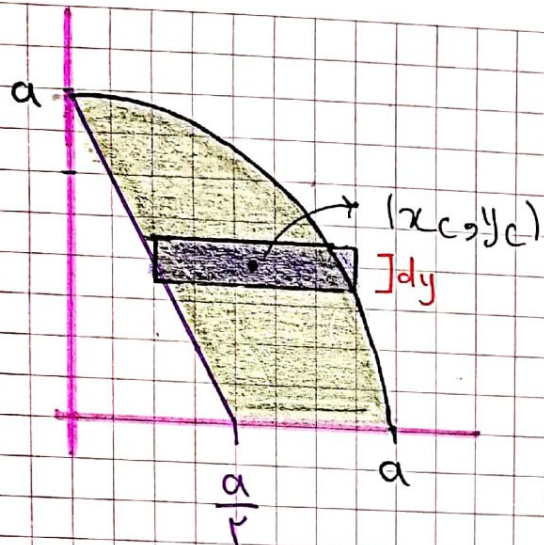
مثال ۲: بدون اشتغال گیری مرکز ثقل جسم مقابل را بیابید.

$A_1 = bh$ مثلث $A_2 = \frac{h}{2}(a-b)$

$$\bar{x} = \frac{x_{c1}A_1 + x_{c2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{h}{2}(bh) + \frac{h}{2} \cdot h \left(\frac{a-b}{2}\right)}{bh + h \left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

البته این جوابه طر و صغر بناریم به $\frac{1}{3}$ باشد صحیح نیست
می‌تونیم نتیجه بگیریم همکاره چون درست نوشته شد (دارد کار می‌کنه)

$$\bar{y} = \frac{\frac{b}{2}(bh) + \left(b + \frac{a-b}{2}\right) \left(\frac{h(a-b)}{2}\right)}{bh + \frac{h(a-b)}{2}}$$



مثال ۳) مرکز ثقل قسمت هائیکه خورده را بیابید.

مرکز ثقل ربع دایره اولی دومی لباسست پس باید انتگرال بگیریم.

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A} \quad , \quad dA = (x_r - x_L) dy$$

مستطیقات

لبه یونی راست منتهای
منتهای چپ

داریم: $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x_r = +\sqrt{a^2 - y^2}$

پس معادله ۲ منتهای رو بدست میاریم:

برای خط صلیب نقطه $(a, 0)$ و $(0, a)$ داریم:

$$y = -x + a \Rightarrow x_L = \frac{a-y}{2}$$

یادآوری: $a(x - x_0) = y - y_0$
لبه شیب

$$dA = (\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{1}{2}(a-y)) dy \quad , \quad x_c = (\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{1}{2}(a-y)) (\frac{1}{2})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^a (\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{1}{2}(a-y)) (\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{1}{2}(a-y)) dy$$

$$\int_0^a (\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{1}{2}(a-y)) dy$$

مخرج: $\frac{1}{2} \int (\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{1}{2}(a-y)) (\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{1}{2}(a-y)) dy =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a ((a^2 - y^2) - \frac{1}{4}(a-y)^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^a ((a^2 - y^2) - \frac{1}{4}(a^2 - 2ay + y^2)) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a (\frac{3}{4}a^2 - \frac{5}{4}y^2 + \frac{1}{2}ay) dy = \frac{1}{2} (\frac{3}{4}a^2 y - \frac{5}{12}y^3 + \frac{1}{4}ay^2) \Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{3}{4}a^3 - \frac{5}{12}a^3 + \frac{1}{4}a^3) = \frac{11}{12}a^3$$

۲) هم میانه تغییر مقدار هم میانه بدون ضرایب نسبت مادی $\frac{\pi}{4} a^2$

مخرج : $\int_0^a (\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{1}{r}(a-y)) dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy - \frac{1}{r} \int_0^a (a-y) dy$

$$= \left(\frac{\pi}{4} a^2 \right) \Big|_0^a - \left(ay - \frac{y^2}{2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_0^a =$$

۱۷
حالت مثال من جزوه

$$\frac{\pi}{4} a^2 - \frac{a^2}{r} + \frac{a^2}{4} - \frac{\pi}{4} a^2 = -\frac{a^2}{4}$$

$$\rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{\frac{\frac{11}{4} a^3}{\frac{\pi}{4} a^2}}{-\frac{a^2}{4}} = -\frac{11}{4} a$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int_0^a y (\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{1}{r}(a-y)) dy}{\int_0^a (\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{1}{r}(a-y)) dy}$$

صورت : $= \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy - \frac{1}{r} \int_0^a (a-y) dy =$

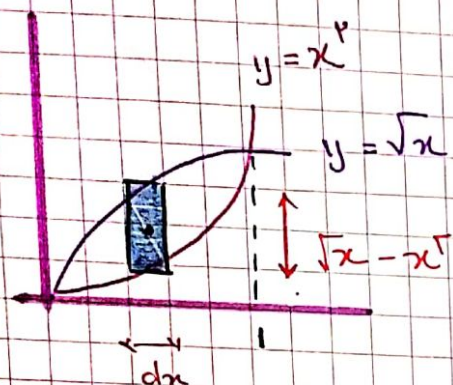
$$a^2 - y^2 = u \quad -y - \frac{1}{2} dy = du \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{u} - \frac{1}{r} \int_0^a (a-y) dy =$$

$$-\frac{1}{r} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{ay^2}{r} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a = -\frac{1}{r} \left(\frac{2}{3} (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{ay^2}{r} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a$$

$$= -\frac{1}{r} \left(\frac{a^3}{r} - \frac{a^3}{3} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{2}{3} a^3 \right) = -\frac{a^3}{12} + \frac{2a^3}{12} = \frac{a^3}{6}$$

درست مثل $\bar{x}$: مخرج $\rightarrow \frac{\frac{a^3}{6}}{-\frac{a^2}{4}} = -\frac{2}{3} a \rightarrow G(-\frac{11}{4} a, -\frac{2}{3} a)$

مثال (٢) مركز ثقل، ابعاد



$$y_c = \frac{y_T + y_B}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{x} + x^2)$$

$$dA = (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x = 1$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2} (\sqrt{x} + x^2) (\sqrt{x} - x^2) dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx}$$

$$\text{مخرج: } = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^5) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{مخرج: } \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

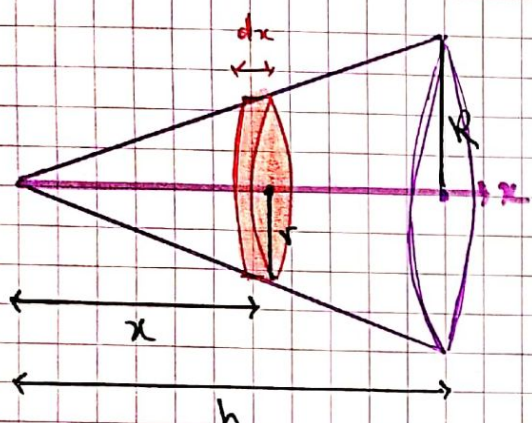
$$\rightarrow \bar{y} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A} = \frac{\int_0^1 x (\sqrt{x} - x^2) dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx}$$

$$\text{مخرج: } \int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx = \left(\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{20}$$

$$\text{مخرج: } y_c \text{ (مركز ثقل)} \rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}$$

$$\rightarrow G\left(\frac{9}{20}, \frac{1}{2}\right)$$



مثال ۵) مرکز ثقل جسم را بیابید.

(۱) یک صفحه به ضخامت dx عمود می‌زنیم. می‌توانیم بدست آوریم که

(۲) شعاع مکمل حاوی میانه باشد:

$$r(x) = 0 - \frac{x}{h}(R - 0) \Rightarrow r(x) = \frac{x}{h}(R)$$

پس حجم که حاوی میانه باشد:

$$dV = \pi \left(\frac{xR}{h} \right)^2 dx$$

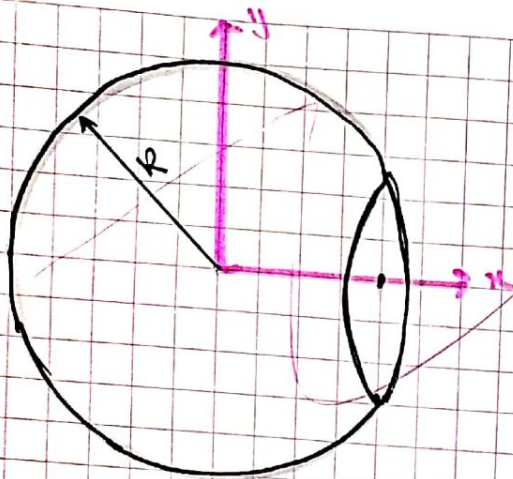
$$\bar{x} = \frac{\int x_c dV}{V} = \frac{\int_0^h x \left(\pi \left(\frac{xR}{h} \right)^2 \right) dx}{\int_0^h \pi \left(\frac{xR}{h} \right)^2 dx} = \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4} \right]_0^h}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3}{4}h$$

ضخامت مکمل (dx) اینقدر کم که $x_c = x$

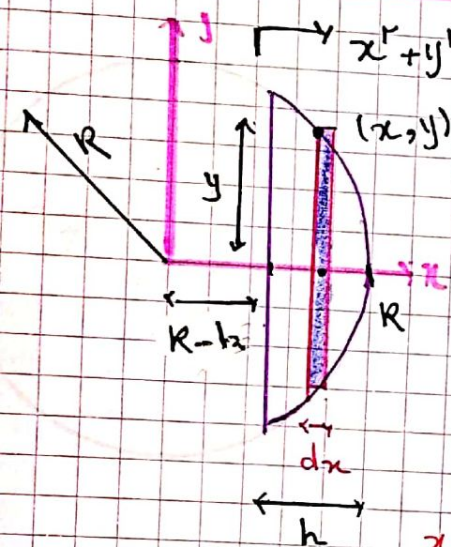
ثقل او نسبت به محور x صاف قرار می‌گیرد پس G روی محور x قرار دارد

و $\bar{x}_c = 0$ باید صفر باشد پس

$$\Rightarrow G\left(\frac{3}{4}h, 0\right)$$



مثال (4) مرکز حجم کلاهک مقابل را بیابید.



$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y^2 = (R^2 - x^2)$$

مثال (4) مرکز حجم کلاهک مقابل را بیابید.

$$dV = \pi (R^2 - x^2) dx$$

$$V = \int_{R-h}^R \pi (R^2 - x^2) dx \rightarrow \text{حجم کلاهک به ارتفاع } h$$

$$y_c = 0, \quad x_c = x$$

مختصات مرکز جرم
محاسبه می شود.

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dV}{V} = \frac{\int_{R-h}^R x (\pi) (R^2 - x^2) dx}{\int_{R-h}^R \pi (R^2 - x^2) dx} = \frac{\int_{R-h}^R (R^2 x - x^3) dx}{\int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx}$$

$$\left. \frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_{R-h}^R$$

$$\left. \frac{R^2 x}{1} - \frac{x^3}{3} \right|_{R-h}^R$$

G(, 0)

سری ها

به مجموع جملات یک دنباله میلن سری
← عددی
← تابع (جملاتش تابع متناهی)

سری تابع:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots$$

هر سری تابع به شکل ...
که در آن C_0 و C_1 و C_2 ... اعداد حقیقی و a مقدار ثابت است و یک سری توانی حول نقطه x می نامیم.

سری تیلور مک لارن

(Taylor and Maclaurin Series)

اگر $f(x)$ بتواند به صورت یک سری توانی حول نقطه a بسط داده شود آنگاه $f(x)$ برابر سری تیلور آن تابع به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n =$$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots$$

فوق

معادله سری تیلور تابع f در a یا حول a امیده می شود برای حالت خاص $a=0$ سری تیلور به صورت زیر می آید.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

نه به آن

سری مک لورن می گویند.

باید توجه نمود که در صورتی که

f قابل بسط به صورت یک

سری توانی حول a باشد

آنگاه برابر با سری تیلور خواهد بود اما توانی وجود دارند که برابر با سری تیلورشان نیستند

چون از سری تابع به $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ می آید:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots$$

$$\hookrightarrow f(a) = C_0 \quad f'(a) = C_1 \quad f''(a) = 2C_2 \quad f'''(a) = 3(2)C_3 \rightarrow C_3 = \frac{f'''(a)}{3 \times 2}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

مثال: بسط مک لورن تابع $f(x) = e^x$ را بیابید.

(مک لورن e^x و $\sin x$ و $\cos x$ را باید حفظ بود)

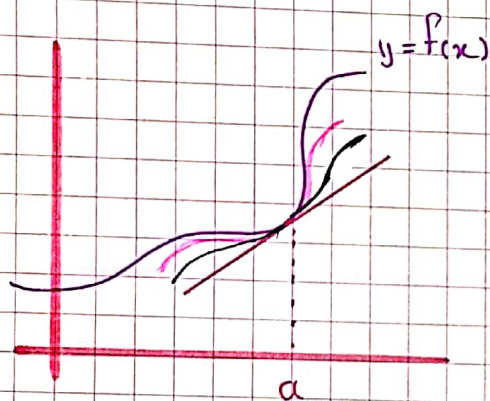
$$f(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

مثال ۲: حاصل $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ را بیابید.

می‌دانیم که: $e^x = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

پس: $e^x - 1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$



تابع $y=f(x)$ و یک حد لورن اون $(y=f(a)+f'(a)(x-a))$ حول نقطه a رفتار مشابهی دارند

هر چه تعداد جمله‌های بیشتری در بسط تیلور استفاده بشه، رفتار بسط تیلور و تابع بیشتر شبیه به هم میشن. مثلاً اگر این جایه جمله دیکه اضافه کنیم:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2$$

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + f'''(a)(x-a)^3$$

ایضاً: ۱ جمله ۲ام (جمله آخر)

۱۱، ۱۰، ۱۳

شماره جمله این سری:

اگر نسبت ۲ جمله متوالی یک سری که جمله از یک باشد از نفعاتی که نسبت سری به تابع اصلی همداست.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

به این آزمون نسبت هم‌میلین وقتی ۲ جمله متوالی نسبت شوند به هم کمتر از ۱ بشه به شرطی که n به سمت بینهایت بره.

مثال ۳) سری مک لورن e^x به ازای چه بازه‌ای از x همگرا است؟

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad a_n = \frac{x^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| < 1 \quad \text{بدین معنی} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < 1$$

برای x مشخصی به وجود نیاید پس این رابطه به ازای همه مقادیر x همگرا برقراره و شمای همگرایی تابع e^x بدینصورت است.

مثال ۴) سری مک لورن تابع $\sin x$ را بدست آورید. (۴۴)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & \rightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) &= \cos x & \rightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -\sin x & \rightarrow & f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & \rightarrow & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & \rightarrow & f^{(4)}(0) = 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\sin x = 0 + 1x + 0x \frac{x^2}{2!} + (-1)x \frac{x^3}{3!} + 0x \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$\sin x$ تابعی فرد هستش. پس بتوانیم هم باید فرد باشه و هم متناظر تابعی داشته باشه.

پس نتیجه گرفت:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مثال ۵) بسط مک لورن تابع $\cos x = 1$ را بدست آورید. (۴۲)

همیشه مثل جمله قبل جمله به جمله بسط رو نوشتیم و به حلقه رفت.
حلقه $\sin x$ و $\cos x$ پس بین بسط ها شون هم همین رابطه برقراره.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

۲) بسط $\cos x$ مثل حلقه زوج در اومد.

مثال ۶) بسط مک لورن $\sin x$ را بدست آورید.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مثال قبل $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

مثال ۷) بسط مک لورن $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ را بدست آورید.

ساخته هندسی:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

a (جمله اول) q (قدر نسبت)

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots + aq^n$$

$$qS_n - S_n = aq^n - a \rightarrow S_n(q-1) = a(q^n - 1)$$

$$\rightarrow S_n = \frac{a(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

sa.m

مجموع جملات هندسی:

۱) عبارات اوله از هم کم کنیم فقط جملات اول و آخر باقی میمونن

اگر $|q| < 1$ - بساعده هندسی نزولی است. - هر جمله مثبت.

یعنی $|q| < 1$ شرط همگرایی بساعده هندسی مثبت.

همین مثبت لغت مجموع بینهایت جمله بساعده هندسی نزولی مادی هست با x به صفر میل می کند.

$$S_{\infty} = \frac{a(q^{\infty} - 1)}{(q - 1)} = \frac{a}{1 - q}$$

مثال ۸) اگر $|x| < 1$ $S_{\infty} = ?$ $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$$a = 1 \quad q = x \quad \rightarrow \quad S_{\infty} = \frac{1}{1 - x}$$

مثال ۹) بسط مک لورن $\frac{1}{1 - x}$ را بدست آورید.

طبق مثال ۸ بدون محاسبه مثبت لغت:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

مثال ۱۰) اگر $|x| < 1$ $S_{\infty} = ?$ $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

$$a = 1 \quad q = -x \quad \rightarrow \quad S_{\infty} = \frac{1}{1 + x}$$

مثال ۱۱) بسط مک لورن $\frac{1}{1 + x}$ را بدست آورید.

طبق مثال ۱۰ بدون محاسبه می توان لغت

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

مثال ۱۲) بسط مک لورن تابع $f(x) = \ln(1+x)$ را بدست آورید در صورتی که $|x| < 1$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

تو حالت عادی این شغلی می باشد:

ولی می خواهیم با روش صنفه حل هاش کنیم

(معادله بسط مک لورن برای توابع از روی بسط مک لورن توابعی داریم)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

می روئیم:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int dx - \int x dx + \int x^2 dx - \int x^3 dx + \dots$$

و انتگرال می گیریم

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + C$$

انتگرال رو معادله می کنیم:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots + C$$

فرض کنیم x می کنیم:

مثال ۱۳) بسط مک لورن تابع $\frac{1}{(1-x)^3}$ را بدست آورید اگر $|x| < 1$

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

می روئیم:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

از طرفین مشتق می گیریم:

تو سامینش اول $n=1$ شده چون اگر صفر می بود سری با ۰ شروع می شد در حالی که ما می خواهیم با ۱ شروع بشه
ولی نمک کلی سامینش به صورت $n=0$ هستش. پس می توئیم $n=0$ بنویسیم اما تو محاسبه هفونقدر که از n
کم کردیم، به n اضافه کنیم

مثال ۱۳) بسط مک لورن $\ln(1+x)$ را بدست آورید. $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)}$$

می بینیم:

اگر از حد طرف اشتغال بگیریم:

استعداد کرد

از این امر می توان $\gamma = 1$

هنگام < 1

و اگر > 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

مثال ۱۴) جمله ای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$ را مشخص کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^p}{(n+1)!}}{\frac{n^p}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right|$$

معادله مشتق می بین
که قدر مطلق رویم داشت

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = \frac{1}{p} (1)^p = \frac{1}{p} < 1$$

هنگام

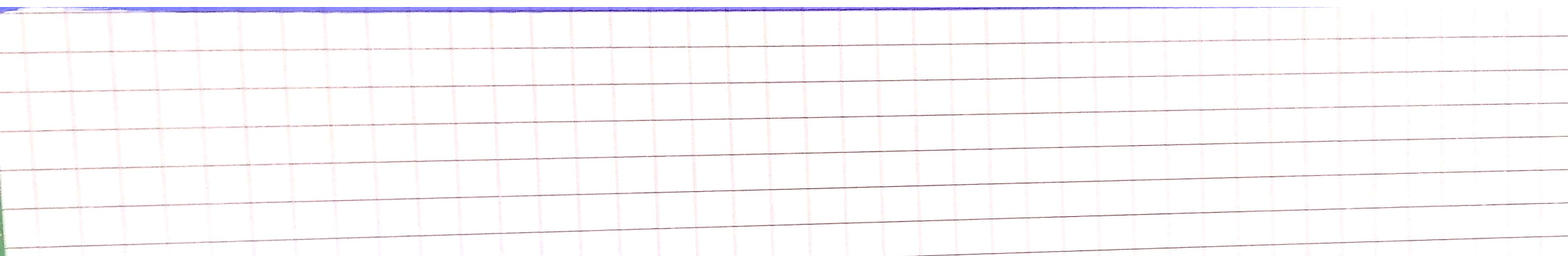
مثال ۱۵) جمله ای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n n!}{n^n}$ را بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{r^{(n+1)} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{r^n n!}{n^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r n^n}{(n+1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right| = \frac{r}{e} < 1$$

هنگام

این عبارت دقیقاً یکبار عدد e است
هستش (رابطه جبر و دیفرانسیل)



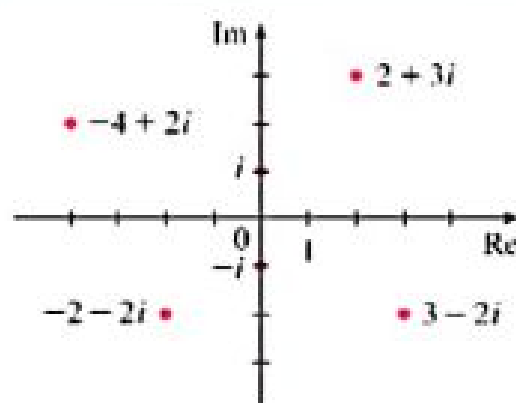


FIGURE 1

Complex numbers as points in the Argand plane

یک عدد مختلط را به صورت $a + bi$ نشان می دهیم که در آن a و b اعداد حقیقی بوده و i نمادی با ویژگی $i^2 = -1$ می باشد. یک عدد مختلط را به صورت زوج مرتب (a, b) نیز می توان نشان داد. همچنین آن را می توان به صورت نقطه ای در صفحه ای به نام صفحه آرگاند (Argand plane) نمایش داد. به a قسمت حقیقی (Real part) عدد مختلط و به b قسمت موهومی (Imaginary part) عدد مختلط گفته می شود.

$$z = a + bi$$

$$\text{Re } z = a \quad \text{قسمت حقیقی}$$

$$\text{Im } z = b \quad \text{قسمت موهومی}$$

در واقع محور x ها محور حقیقی و محور y ها محور موهومی صفحه آرگاند می باشد.

مجموعه اعداد حقیقی زیر مجموعه اعداد مختلط می باشد.

در مجموعه اعداد مختلط معادلاتی نظیر $x^2 + 1 = 0$ دُرّا جواب می باشد.

جمع و تفریق اعداد مختلط

The sum and difference of two complex numbers are defined by adding or subtracting their real parts and their imaginary parts:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

قسمت موهومی را هم د قسمت
حقیقی هم را هم جمع و تفریق و
ضرب می بین

For instance,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

ضرب اعداد مختلط

پس از ضرب معمولی به جای i^2 مقدار -1 را قرار می دهیم

EXAMPLE 1

$$\begin{aligned} (-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i) \\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i \end{aligned}$$



EXAMPLE 2 Express the number $\frac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ in the form $a + bi$.

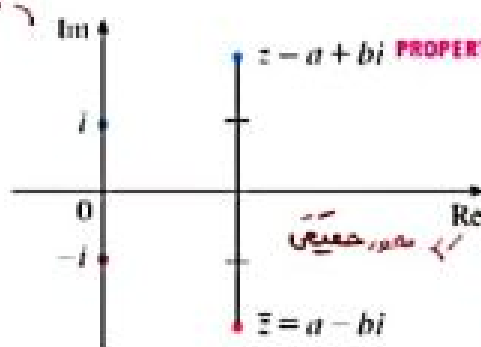
SOLUTION We multiply numerator and denominator by the complex conjugate of $2 + 5i$, namely $2 - 5i$, and we take advantage of the result of Example 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

می خواد این کسر رو
به نرم ساده بنویسه
باید تو مزدوج مزدوج ضرب و تقیه
که

مربعه عدد حقیقی + را همیشه به محور حقیقی، خروج حقیقی + (imaginary part) بهیچ و آن را i + نشان می دهند.

دور محور حقیقی



PROPERTIES OF CONJUGATES

$$\overline{\overline{z}} = z = \overline{\overline{\overline{z}}}$$

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

عدد مقلبتاً $z = a + bi$

عدد مقلبتاً $\overline{z} = a - bi$

عدد مقلبتاً و مزدوج ازن نسبت به محور حقیقی
مربعه صنفند

FIGURE 2

ماژول (مدول) یا قدر مطلق عدد مختلط z را با $|z|$ نشان داده و مطابق شکل بیانگر فاصله آن نقطه از مبدا مختصات می باشد.

فاصله هر عدد مقلبتاً از مبدا
مربعه اندازه اسی

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

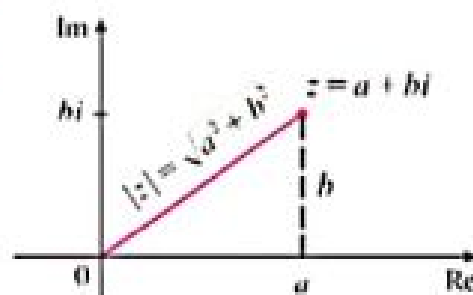


FIGURE 3

The modulus, or absolute value, $|z|$ of a complex number $z = a + bi$ is its distance from the origin. From Figure 3 we see that if $z = a + bi$, then



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Notice that

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

and so

$$z\overline{z} = |z|^2$$

This explains why the division procedure in Example 2 works in general:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

معادله دایره در دستگاه مختصات به صورت $|z - z_0| = R$ می باشد چرا؟ (مرکز دایره (x_0, y_0) و شعاع آن R)

مثال: اگر $\left| \frac{z+2i}{z-1} \right| \leq 3$ مکان هندسی نقاط z را تعیین نمائید. (محیط و خارج دایره ای به مرکز $(0, 11/8)$ و شعاع

9/8

$z = x + iy \rightarrow (x, y)$ مرکز دایره
 $z_0 = x_0 + iy_0 \rightarrow (x_0, y_0)$ مرکز دایره
 $\left\{ |z - z_0| = R \right\}$ این معادلات به هم نشان می‌دهند که دایره‌ها به هم می‌خورند

$$|z - z_0| = R \rightarrow |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| = R \rightarrow |(x - x_0) + (y - y_0)i| = R$$

$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ معادله دایره است
 $\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} |(x - x_0) - (y - y_0)i|^2 = R^2 \rightarrow$ حالا اندازه‌های دو ضلع می‌گیریم
 این الان به عدد مطلقه.

مثال :

$$\left| \frac{z + 2i}{z - i} \right| \leq 3 \Rightarrow \frac{|z + 2i|}{|z - i|} \leq 3 \rightarrow |z + 2i| \leq 3 |z - i|$$

$\rightarrow x^2 + (y + 2)^2 \leq 9(x^2 + (y - 1)^2)$ حالا به هم می‌زنیم
 اندازه هر کدام دو ضلع می‌گیریم به توان ۲ می‌رسانیم که
 (اینجا از بیرون بیرون)

$$\rightarrow x^2 + (y + 2)^2 \leq 9(x^2 + (y - 1)^2) \rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 \leq 9x^2 + 9y^2 - 18y + 9 \rightarrow 0 \leq 8x^2 + 8y^2 - 22y + 5$$

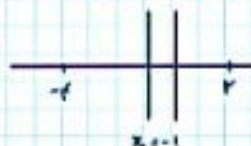
$$\rightarrow 0 \leq x^2 + (y - \frac{11}{8})^2 - \frac{121}{64} \rightarrow (\frac{11}{8})^2 \leq x^2 + (y - \frac{11}{8})^2$$

داخل دایره دایره $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$
 بیرون دایره دایره $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq R^2$

$|z - 2| = 3$ دایره ای به شعاع ۳ و مرکز (۰، ۲)
 مرکز دایره (۰، ۲) و شعاع ۳
 این دایره به هم می‌خورد

$|z - i| = 2$ دایره ای به شعاع ۲ و مرکز (۰، ۱)
 این دایره به هم می‌خورد

$|z - 2| = |z + 4|$ معادله نشان می‌دهد که این دایره به هم می‌خورد
 معادله نشان می‌دهد که این دایره به هم می‌خورد
 (این دایره به هم می‌خورد)



اگر حلش کنیم :
 $|x - 2 + iy|^2 = |x + 4 + iy|^2 \rightarrow (x - 2)^2 = (x + 4)^2 \xrightarrow{\text{بهم می‌زنیم}} x - 2 = -x - 4 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1$

حالا این معادله هم $3|z + 3| = 10$ معادله نشان می‌دهد که این دایره به هم می‌خورد
 معادله نشان می‌دهد که این دایره به هم می‌خورد
 (این دایره به هم می‌خورد)

چون $i^2 = -1$ است پس می توان i را جذر -1 دانست از طرفی چون $-i$ نیز جذر -1 است بنابراین i را جذر اصلی -1 نامیده و آن را به صورت $i = \sqrt{-1}$ می نویسیم. در حالت کلی اگر c عدد مثبت دلخواهی باشد داریم $\sqrt{-c} = \sqrt{c} i$

With this convention, the usual derivation and formula for the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are valid even when $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXAMPLE 3 Find the roots of the equation $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUTION Using the quadratic formula, we have

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

شکل قطبی اعداد مختلط ($r \geq 0$)

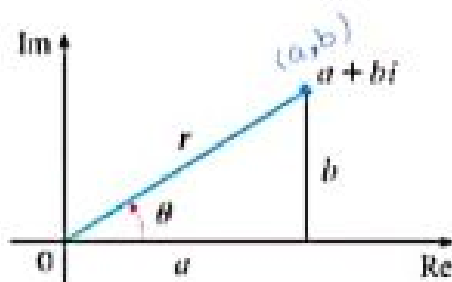


FIGURE 4

$$r = |z| \quad \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad a \neq 0$$

$$a = r \cos \theta \quad b = r \sin \theta$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

as in Figure 4. Therefore we have

$$z = a + bi = (r \cos \theta) + (r \sin \theta)i$$

Thus we can write any complex number z in the form

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

where

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

and

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

θ آرگمان z بوده و آن را با نماد $\arg(z)$ نشان می دهند منظور از θ آرگمان اصلی عدد z بوده که پس از مشخص شدن ربع صفحه می که z در آن است تعیین می گردد.

شکل قطبی اعداد مضاعف

$$Z_r = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$Z_r = r_r (\cos \theta_r + i \sin \theta_r)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 \\ Z_r \end{array} \right\} Z_1 Z_r = r_1 r_r (\cos (\theta_1 + \theta_r) + i \sin (\theta_1 + \theta_r))$$

جست
باین صفحه ۴۳ و ۵

به همین ترتیب:

$$Z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$Z^3 = r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$$Z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

مثال: $Z = 1 + i$ Z^* را بیابید.

راه ۱: $1 + i$ به حالت قطبی به یک بیضی بیضی منسوب به جیبی طولانی است.

راه ۲: $1 + i$ به حالت قطبی منسوب

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z^4 = (\sqrt{2})^4 (\cos \frac{1 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{1 \cdot \pi}{4}) \Rightarrow (1+i)^4 = 2^2 (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow (1+i)^4 = 32i$$

تئوری، سوپر (صفحه ۷)

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \rightarrow Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\Rightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

EXAMPLE 4 Write the following numbers in polar form.

(a) $z = 1 + i$

(b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUTION

(a) We have $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ and $\tan \theta = 1$, so we can take $\theta = \pi/4$. Therefore the polar form is

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

(b) Here we have $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ and $\tan \theta = -1/\sqrt{3}$. Since w lies in the fourth quadrant, we take $\theta = -\pi/6$ and

$$w = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

The numbers z and w are shown in Figure 5.

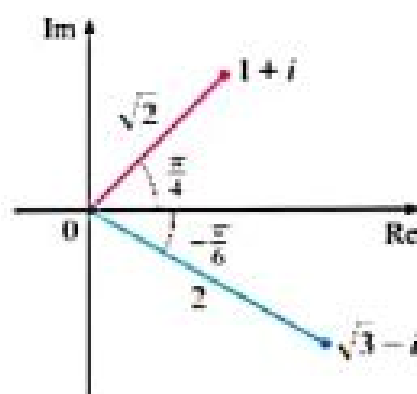


FIGURE 5

تذکر: ضرب و تقسیم اعداد مختلف با استفاده از فرم مثلثاتی آنها آسانتر از فرم دکارتی است.

The polar form of complex numbers gives insight into multiplication and division. Let

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

be two complex numbers written in polar form. Then

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \end{aligned}$$

Therefore, using the addition formulas for cosine and sine, we have

1

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

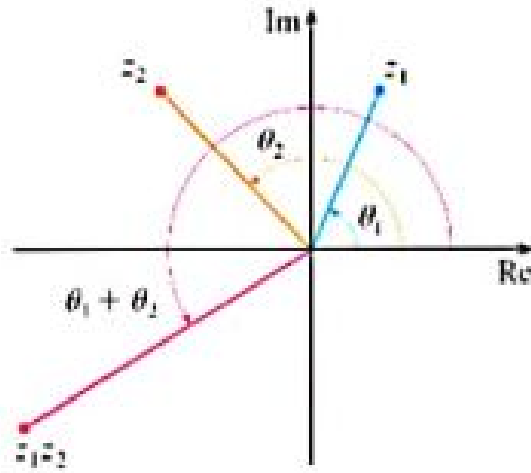


FIGURE 6

A similar argument using the subtraction formulas for sine and cosine shows that *to divide two complex numbers we divide the moduli and subtract the arguments*.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad z_2 \neq 0$$

In particular, taking $z_1 = 1$ and $z_2 = z$ (and therefore $\theta_1 = 0$ and $\theta_2 = \theta$), we have the following, which is illustrated in Figure 7.

$$\text{If } z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \text{ then } \frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta).$$

رابطہ فوق معکوس عدد مختلط 'z' بیان می کند۔

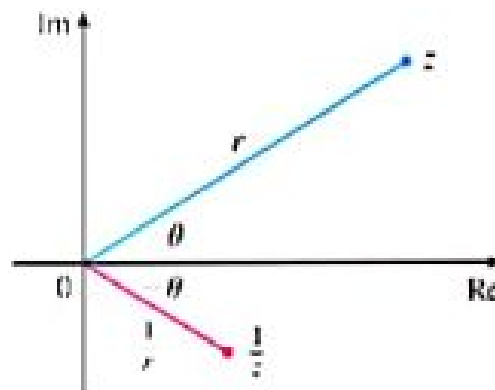


FIGURE 7

EXAMPLE 3 Find the product of the complex numbers $1 + i$ and $\sqrt{3} - i$ in polar form.

SOLUTION From Example 4 we have

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

and
$$\sqrt{3} - i = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

So, by Equation 1,

$$\begin{aligned} (1 + i)(\sqrt{3} - i) &= 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

This is illustrated in Figure 8.

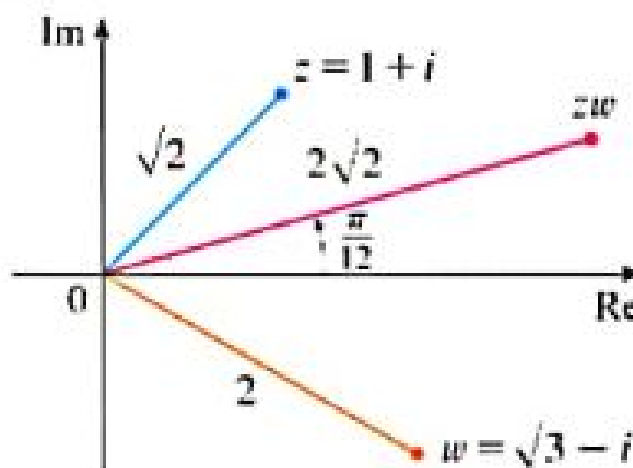


FIGURE 8

Repeated use of Formula 1 shows how to compute powers of a complex number. If

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

then
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

and
$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

If $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ and n is a positive integer, then

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

DE MOIVRE'S THEOREM

EXAMPLE 6 Find $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$.

SOLUTION Since $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, it follows from Example 4(a) that $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ has the polar form

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right) \\ &= \frac{2^5}{2^{10}} \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right) = \frac{1}{32}i\end{aligned}$$

محاسبه ریشه تمام یک عدد مختلف
صورت
 $w^n = z$

Writing these two numbers in trigonometric form as

$$w = s(\cos \phi + i \sin \phi) \quad \text{and} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

and using De Moivre's Theorem, we get

$$s^n(\cos n\phi + i \sin n\phi) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

The equality of these two complex numbers shows that

$$s^n = r \quad \text{or} \quad s = r^{1/n}$$

$$\text{and} \quad \cos n\phi = \cos \theta \quad \text{and} \quad \sin n\phi = \sin \theta$$

From the fact that sine and cosine have period 2π it follows that

$$n\phi = \theta + 2k\pi \quad \text{or} \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Thus

$$w = r^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

Since this expression gives a different value of w for $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, we have the following.

3 ROOTS OF A COMPLEX NUMBER Let $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ and let n be a positive integer. Then z has the n distinct n th roots

$$w_k = r^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

where $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

با توجه به w_k در می یابیم که تمام ریشه ها در فرم قطبی دارای اندازه یا مازول $|w_k| = r^{1/n}$ هستند بنابراین فاصله آنها از مبدأ یکسان است پس بر روی یک دایره قرار دارند همچنین با توجه به اینکه آرگومان هر ریشه نسبت به ریشه قبلی به اندازه $2\pi/n$ بیشتر است در می یابیم که ریشه ها به یکنواختی بر روی محیط دایره قرار دارند.

EXAMPLE 2 Find the six sixth roots of $z = -8$ and graph these roots in the complex plane.

SOLUTION In trigonometric form, $z = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$. Applying Equation 3 with $n = 6$, we get

$$w_k = 8^{1/6} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right)$$

We get the six sixth roots of -8 by taking $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ in this formula:

$$w_0 = 8^{1/6} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$w_1 = 8^{1/6} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2} i$$

$$w_2 = 8^{1/6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$w_3 = 8^{1/6} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$w_4 = 8^{1/6} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt{2} i$$

$$w_5 = 8^{1/6} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

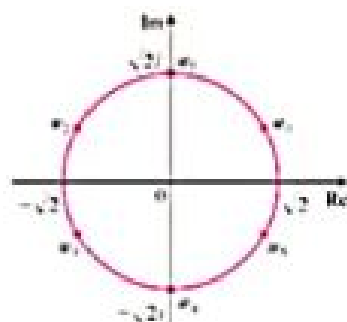


FIGURE 9
The six sixth roots of $z = -8$

All these points lie on the circle of radius $\sqrt{2}$ as shown in Figure 9. □

COMPLEX EXPONENTIALS

We also need to give a meaning to the expression e^z when $z = x + iy$ is a complex number. The theory of infinite series as developed in Chapter 11 can be extended to the case where the terms are complex numbers. Using the Taylor series for e^x (11.10.11) as our guide, we define

$$\boxed{4} \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

and it turns out that this complex exponential function has the same properties as the real exponential function. In particular, it is true that

$$\boxed{5} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

If we put $z = iy$, where y is a real number, in Equation 4, and use the facts that

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \dots$$

$$\begin{aligned} \text{we get} \quad e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ = \cos y + i \sin y$$

Here we have used the Taylor series for $\cos y$ and $\sin y$ (Equations 11.10.16 and 11.10.15). The result is a famous formula called **Euler's formula**:

6

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

شان π و

Combining Euler's formula with Equation 5, we get

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} + \cdots$$

7

$$e^{i(iy)} = e^{-y} = e^i(\cos y + i \sin y)$$

با استفاده از فرمول اولر می توان تابع نمایی، تریگنومی و ... عددهای مختلف را محاسبه نمود.

EXAMPLE 8 Evaluate: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUTION

(a) From Euler's equation (6) we have

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Using Equation 7 we get

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e} \quad \square$$

Finally, we note that Euler's equation provides us with an easier method of proving De Moivre's Theorem:

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

■ We could write the result of Example 8(a) as

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

This equation relates the five most famous numbers in all of mathematics: 0, 1, e , i , and π .

رابطه DE MOIVRE را با استفاده از رابطه اولر اثبات نمائید.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

ضرب و تقسیم نیز با استفاده از رابطه اولر اثبات می گردد.

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\cos x = \cosh(ix)$$

$$i \sin x = \sinh(ix) \quad \text{ثابت کنید}$$